Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Auxiliares: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

16/Abril/2009

P1. Usemos conservación de la energía. Inicialmente la Energía es

$$E_i = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \Rightarrow E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La Energía en el instante en que el resorte se estira en su máxima capacidad δ_{max} es

$$E_f = K + U = 0 + \frac{1}{2}k\delta_{max}^2 \Rightarrow E_f = \frac{1}{2}k\delta_{max}^2$$

El trabajo realizado por la fuerza de roce es

$$W = \int \vec{N} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{\delta_{max}} (\mu_c mg) dx = -\mu_c mg \delta_{max}$$

por lo tanto

$$\Delta E = \sum W_{fuerzas\ no\ conservativas}$$

$$\frac{1}{2}(k\delta_{max}^2 - mv_0^2) = -\mu_c mg \delta_{max}$$

$$\mu_c = \frac{mv_0^2 - k\delta_{max}^2}{2mg\delta_{max}}$$

P2. Para la fuerza de reacción normal, hacemos un D.C.L., donde se obtienen las ecuaciones

$$\hat{j} : mg - F_{r,y} - \mu N = m\ddot{y}$$

$$\hat{i} : N - F_{r,x} = m\ddot{x}$$

usando la geometría del problema, se puede apreciar que

$$F_{r,y} = k\delta_y = k\sqrt{D^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}} = ky$$

$$F_{r,x} = k\delta_x = k\sqrt{D^2 + y^2} \frac{D}{\sqrt{D^2 + y^2}} = kD$$

reemplazando estos términos, y reconociendo que $\ddot{x} = 0$, se tiene que:

$$\hat{i} : N = F_{r,x} = kD = cte$$

b) Se debe recordar la definición de trabajo y el teorema del trabajo y la energía:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{\text{fuerzas no conservativas}} = \Delta E$$

Notemos que la fuerza no conservativa del problema es la fuerza de roce, y su trabajo es:

$$W_{\text{roce}} = \int (-\mu N dy) = - \int_{y_0=0}^{y=y_{\max}} aykDdy = -\frac{akD}{2}y_{\max}^2$$

$$E_i = \frac{1}{2}kD^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}k(D^2 + y_{\max}^2) - mgy_{\max}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}ky_{\max}^2 - mgy_{\max} = -\frac{akD}{2}y_{\max}^2$$

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}k + \frac{akD}{2}\right) = mg \Rightarrow y_{\max} = \frac{2mg}{k(1+aD)}$$

c) De todas las fuerzas, la normal no realiza trabajo por ser perpendicular al movimiento. Luego, para el resto de las fuerzas se tiene:

$$W_{\text{resorte}} = \int (-ky)dy = - \int_{y_0=0}^{y=y_{\max}} kydy = -\frac{k}{2}\left(\frac{2gm}{k(1+aD)}\right)^2$$

$$W_{\text{resorte}} = -\frac{2(mg)^2}{k(1+aD)^2}$$

$$W_{\text{roce}} = \int (-\mu N dy) = - \int_{y_0=0}^{y=y_{\max}} aykDdy = -\frac{akD}{2}\left(\frac{2gm}{k(1+aD)}\right)^2$$

$$W_{\text{roce}} = -\frac{2aD(mg)^2}{k(1+aD)^2}$$

$$W_{\text{peso}} = \int mgdy = mg\left(\frac{2gm}{k(1+aD)}\right) = \frac{2(mg)^2}{k(1+aD)}$$

P3. a) Para $r > R$, no es difícil ver que la fuerza que siente la partícula de masa m es

$$\vec{F}(r > R) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

para $r < R$, debemos calcular la masa que está generando la fuerza de atracción que actúa sobre la masa m . Dado que la densidad es constante, se tiene que

$$M_e(r) = \rho V(r) = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow M_e(r) = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

así, se tiene que la fuerza que siente la partícula para $r < R$ es

$$\vec{F}(r < R) = -\frac{GmM}{R^3}r\hat{r}$$

b) Dado que la única fuerza que actúa proviene de un potencial, se tiene conservación de la energía. El potencial para $r > R$ es

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

Energía inicial

$$E_i = K + U = 0$$

Energía final

$$E_f = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{GmM}{R} \Rightarrow E_i = E_f \Leftrightarrow v_s = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

c) Calculemos el potencial

$$U(r < R) = \int \left(-\frac{GmM}{R^3}r\hat{r}\right) \cdot (-dr\hat{r}) = \frac{GmM}{2R^3}r^2 + C$$

el potencial debe ser continuo, y el punto de conflicto es $r = R$. Entonces

$$-\frac{GmM}{R} = \frac{GmM}{2R} + C \Rightarrow C = -3\frac{GmM}{2R}$$

finalmente

$$U(r < R) = \frac{GmM}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right)$$

Ya se conoce la energía inicial. La energía final es

$$E_f = \frac{1}{2}mv_o^2 - 3\frac{GmM}{2R}$$

igualando energías

$$0 = \frac{1}{2}mv_o^2 - 3\frac{GmM}{2R} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{3GM}{R}}$$