

Pauta P2 C1 FI2A1 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Auxiliares: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

Primavera 2008

P2.

a) Haciendo el D.C.L. correspondiente, se tiene que

$$\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = (-N + mg \sin \alpha)\hat{\theta} - mg \cos \alpha \hat{r}$$

Para la aceleración se tiene que $\theta = \alpha = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, por lo que la aceleración queda escrita como:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha)\hat{r} - r\dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{\theta} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi})\hat{\phi}$$

usando la segunda ley de Newton, se tiene que las ecuaciones de movimiento son:

$$\hat{r} : -mg \cos \alpha = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha)$$

$$\hat{\theta} : -N + mg \sin \alpha = -mr\dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\hat{\phi} : 0 = m \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi} \sin^2 \alpha)$$

para la coordenada ϕ , se tiene que

$$0 = m \frac{\sin \alpha}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) \Rightarrow r^2 \dot{\phi} = cte = r_0^2 \dot{\phi}_0$$

de la condición inicial de velocidad

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{\phi} = \dot{r}_0 \hat{r} + r_0 \sin \alpha \dot{\phi}_0 \hat{\phi} \Rightarrow \dot{r}_0 = 0 \wedge r_0 \sin \alpha \dot{\phi}_0 = v_0$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{r_0 \sin \alpha}$$

por lo que se tiene que, combinando esta última ecuación con la segunda ley de Newton en ϕ :

$$\dot{\phi}(r) = \left(\frac{v_0 r_0}{\sin \alpha}\right) \frac{1}{r^2}$$

b) Sustituyendo $\dot{\phi}$ en la segunda ecuación de Newton para la coordenada r , se obtiene que:

$$-g \cos \alpha = \ddot{r} - r \sin^2 \alpha \left(\frac{v_0 r_0}{\sin \alpha} \right)^2 \frac{1}{r^4} = \ddot{r} - (v_0 r_0)^2 \frac{1}{r^3}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = (v_0 r_0)^2 \frac{1}{r^3} - g \cos \alpha$$

usando la regla de la cadena, podemos escribir $\ddot{r} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr}$, y aplicando el método de separación de variables e integrando, se tiene:

$$\int_{\dot{r}_0=0}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} = \int_{r_0}^r [(v_0 r_0)^2 \frac{1}{r^3} - g \cos \alpha] dr$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{(v_0 r_0)^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) - g \cos \alpha (r - r_0)$$

y de aquí se obtiene que:

$$\dot{r}^2 = (v_0 r_0)^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - 2g \cos \alpha (r - r_0)$$

c) Busquemos las distancias radiales mínima y máxima del movimiento de la partícula. Para esto, cuando la partícula llegue a dichos radios, su velocidad radial \dot{r} debe ser nula ya que, de lo contrario, seguirá avanzando radialmente. En base a esto:

$$\dot{r}^2 = 0 \Rightarrow 2g \cos \alpha (r - r_0) = (v_0 r_0)^2 \left(\frac{r^2 - r_0^2}{r^2 r_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow 2g \cos \alpha = v_0^2 \left(\frac{r + r_0}{r^2} \right)$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 2g \cos \alpha \frac{r^2}{r + r_0}$$

si evaluamos en $r_{max} = 2r_0$, se tiene que:

$$v_0^2 = \frac{8}{3} g r_0 \cos \alpha$$

d) Si evaluamos en en $r_{min} = \frac{r_0}{2}$, se tiene que:

$$v_0^2 = \frac{1}{3} g r_0 \cos \alpha$$

y de aquí se obtiene que la condición que debe cumplir v_0 para que la partícula no se salga de la superficie cónica es:

$$v_0 \in \left[\sqrt{\frac{1}{3} g r_0 \cos \alpha}, \sqrt{\frac{8}{3} g r_0 \cos \alpha} \right]$$