Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Auxiliares: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

3/Abril/2009

P1. Veamos que por la geometría del problema se obtiene

$$L(t) = L_0 - R\phi \Rightarrow \dot{L} = -R\dot{\phi} \wedge \ddot{L} = -R\ddot{\phi}$$

Para encontrar la aceleración de la partícula, derivamos temporalmente dos veces la expresión que se tiene para $\vec{r}(t)$

$$\dot{\vec{r}} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{L}\hat{\phi} - L\dot{\phi}\hat{\rho} = -L\dot{\phi}\hat{\rho} \Rightarrow \vec{a} = -(\dot{L}\dot{\phi}\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\rho} + L\dot{\phi}^2\hat{\phi})$$

Finalmente, haciendo un D.C.L. se obtiene

$$\hat{\phi}) - T = -mL\dot{\phi}^2$$

$$\hat{\rho})0 = -m(\dot{L}\dot{\phi} + L\ddot{\phi})$$

Usando la segunda ecuación, y reemplazando adecuadamente, se puede construir una e.d.o. para L, que queda de la forma

$$\dot{L}^2 + L\ddot{L} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(L\dot{L}) = 0 \Rightarrow L\dot{L} = C$$

para $t = 0$

$$\dot{\vec{r}}(t=0) = -L_0\dot{\phi}_0\hat{\rho} = -v_0\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{L_0}.$$

Usando esto, y que $\dot{L}_0 = -R\dot{\phi}_0 = -v_0\dfrac{R}{L_0}$, se tiene que

$$C = L_0(-v_0\frac{R}{L_0}) = -v_0R$$

finalmente

$$\dot{L} = -\frac{v_0R}{L}$$

b) Por la parte anterior sabemos que $L = L_0 - R\phi$ y $\dot{L} = -R\dot{\phi}$. Reemplazando en a) se tiene

$$-R\dot{\phi} = -\frac{v_0R}{L_0 - R\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{L_0 - R\phi}$$

c) usando la primera ecuación de movimiento y el resultado obtenido en la parte b), se tiene que

$$T_{mx} = mL\dot{\phi}^2_{mx} \Rightarrow L = \frac{mv_0^2}{T_{mx}} \Rightarrow \phi_{mx} = \frac{1}{R}(L_0 - \frac{mv_0^2}{T_{mx}})$$

P2. Identifiquemos las fuerzas:

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roce} + \vec{T}$$

usando coordenadas cilíndricas sobre el plano se tiene que

$$\vec{g} = -g\sin\alpha\cos\theta\hat{\rho} - g\sin\alpha\sin\theta\hat{\theta} + g\cos\alpha\hat{k}$$

entonces

$$\sum \vec{F} = -mg\sin\alpha\cos\theta\hat{\rho} - mg\sin\alpha\sin\theta\hat{\theta} + mg\cos\alpha\hat{k} + N\hat{k} - \mu N\hat{\theta} - T\hat{\rho}$$

ahora, las coordenadas de la aceleración. Dado que $\rho = L = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, y como $z = 0 \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$, por lo que se tiene

$$\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\hat{\rho} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

y ocupando la segunda ley de Newton, separando por escalares, se tiene

$$\hat{\rho}) - mg\sin\alpha\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta}) - mg\sin\alpha\sin\theta - \mu N = mL\ddot{\theta}$$

$$\hat{k})N - mg\cos\alpha = 0$$

de la tercera ecuación se desprende que $N = mg\cos\alpha$. Usando esto y la segunda ecuación de movimiento se tiene que:

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\alpha\sin\theta - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\alpha\sin\theta - \mu\frac{g}{L}\cos\alpha$$

usando regla de la cadena y separación de variables se tiene que

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{L}\sin\alpha\sin\theta - \mu\frac{g}{L}\cos\alpha$$

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}(\theta=\pi)} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{L}\sin\alpha\int_{\theta_0=0}^{\theta=\pi}(-\sin\theta)d\theta - \mu\frac{g}{L}\cos\alpha\int_{\theta_0=0}^{\theta=\pi}d\theta$$

$$\frac{1}{2}(\dot{\theta}^2(\theta=\pi) - \dot{\theta}_0^2) = \frac{g}{L}\sin\alpha(\cos\pi - \cos 0) - \mu\frac{g}{L}\cos\alpha\pi$$

$$\dot{\theta}^2(\theta=\pi) = \dot{\theta}_0^2 - 4\frac{g}{L}\sin\alpha - 2\mu\frac{g}{L}\cos\alpha\pi$$

ahora, usando la primera ecuación de movimiento

$$mg\sin\alpha\cos\theta + mL\dot{\theta}^2 = T$$

deseamos que $T \geq 0$ siempre, en particular, cuando llegue al punto B (el más crítico). Entonces:

$$\dot{\theta}^2(\theta = \pi) \geq \frac{g}{L}\sin\alpha$$

por lo tanto, juntando los dos últimos resultados se tiene que

$$\dot{\theta}_0^2 - 4\frac{g}{L}\sin\alpha - 2\mu\frac{g}{L}\cos\alpha\pi \geq \frac{g}{L}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_0^2 \geq \frac{g}{L}(5\sin\alpha + 2\pi\mu\cos\alpha)$$

la velócidad mínima se alcanza cuando la desigualdad se convierte en igualdad, y dado que $\vec{v} = L\dot{\theta}\hat{\theta}$, se tiene que

$$v_{0,min} = \sqrt{gL\{5\sin\alpha + 2\pi\mu\cos\alpha\}}$$

b) Análisis:

Para $\mu = 0$ y $\alpha\epsilon(0, \pi/2)$, se tiene que $v_{0,min} = \sqrt{5gL\sin\alpha}$, que corresponde a la velocidad mínima que se requiere para vencer la componente de la gravedad.

Para $\alpha = 0$ y $\mu > 0$, se tiene que $v_{0,min} = \sqrt{2\pi gL\mu\cos\alpha}$, que corresponde a la velocidad mínima para llegar al punto B sin ser frenado en el camino por el roce

Para $\alpha = \pi/2$ y $\mu > 0$, se tiene que $v_{0,min} = \sqrt{5gL}$, que corresponde a la velocidad mínima para llegar al punto B y vencer la gravedad de manera totalmente completa. Notemos que para este valor de α, se tiene que la partícula pierde contacto con la superficie ($N = 0$).