

Pauta Ejercicio 3
Gabriel Cuevas
24/08/2006

Primero veremos la geometría del problema.

Como el ángulo entre la generatriz y el eje del cono es $\frac{\pi}{4}$, tenemos que:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Además debemos ver que el radio que tenemos no es el mismo que el visto desde el vértice del cono, el cual utilizaremos para las coordenadas esféricas. Por lo tanto mediante una relación geométrica se obtiene que:

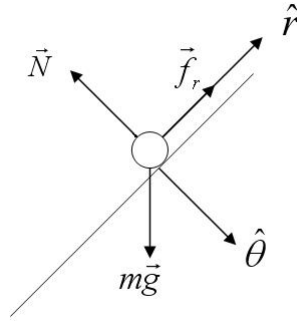
$$r_o \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \rho_o$$

$$\Rightarrow r_o = \sqrt{2}\rho_o$$

Revisado lo anterior, podemos comenzar a resolver el problema:

1. **Parte a).**

Utilizaremos coordenadas esféricas. Realizando el DCL:



Así podemos ver que las ecuaciones según las coordenadas nos quedan:

$$(\hat{r}) f_r - mg \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -mr_o \omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$(\hat{\theta}) - N + mg \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -mr_o \omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora simplificamos las ecuaciones y nos quedan:

$$(1) f_r = \frac{m}{\sqrt{2}} (g - \rho_o \omega^2)$$

$$(2) N = \frac{m}{\sqrt{2}} (g + \rho_o \omega^2)$$

Así imponemos que $f_r = 0$ en (1) y se obtiene que:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\rho_o}}$$

2. Parte b).

Ahora debemos ver que el roce estático:

$$f_r \leq \mu_e N$$

En el caso extremo, es decir, el máximo valor que puede tomar la fuerza de roce se cumple que:

$$f_r = \mu_e N$$

Esto en conjunto con la ecuación (2) se obtiene que:

$$f_r = \mu_e \frac{m}{\sqrt{2}} (g + \rho_o \omega^2)$$

Igualando esto con la ecuación (1), se obtiene que:

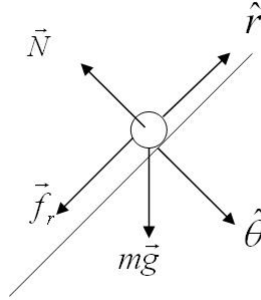
$$\frac{m}{\sqrt{2}} (g - \rho_o \omega^2) = \mu_e \frac{m}{\sqrt{2}} (g + \rho_o \omega^2)$$

Y de esta última expresión despejando ω , se obtiene que:

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{g(1 - \mu_e)}{\rho_o(1 + \mu_e)}}$$

Podemos ver que este valor es menor que lo obtenido en la parte (a), lo cual no corresponde con el supuesto que el sistema giraría más rápido (según enunciado).

Esto sucede debido a que cuando el sistema gira muy rápido, la partícula tiende a subir y no a bajar, por lo tanto el roce apunta en la dirección contraria, es decir hacia abajo como se muestra en el DCL:



Así la ecuación (1), se transforma en:

$$(\bar{1}) f_r = \frac{m}{\sqrt{2}} (\rho_o \omega^2 - g)$$

De aquí, realizando el mismo desarrollo se obtiene:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g(1 + \mu_e)}{\rho_o(1 - \mu_e)}}$$

Lo cual si corresponde con el enunciado y es una condición de máximo.