P1 órbita parabólica punto $r = R$:

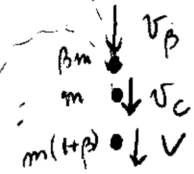
$$E = \frac{1}{2}(\beta m) v_\beta^2 - \frac{G(\beta m) M}{R} = 0$$

↑ parábola

$$\Rightarrow \quad v_\beta = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

órbita circular: Fuerzas:

$$\frac{GmM}{R^2} = \frac{m v_c^2}{R} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



choque: conserv. momentum lineal:

$$(\beta m) v_\beta + m v_c = m(1+\beta) V$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2GM}{R}} + \sqrt{\frac{GM}{R}}\right) = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

energía después del choque

$$E(0^+) = \frac{1}{2} m(1+\beta) V^2 - \frac{Gm(1+\beta)M}{R}$$

$$= \frac{1}{2} m(1+\beta)\frac{4}{(1+\beta)^2}\frac{GM}{R} - \frac{GmM}{R}(1+\beta)$$

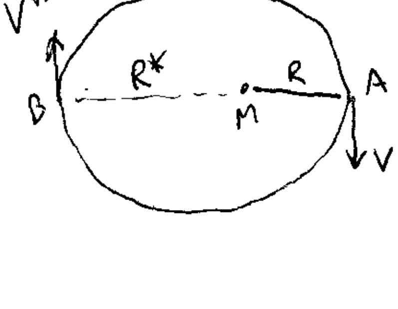
$$= \frac{GmM}{R}\left(\frac{2}{1+\beta} - (1+\beta)\right)$$

$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{GmM}{R}\left(\frac{1-2\beta-\beta^2}{1+\beta}\right) = \frac{GmM}{R}\left(\frac{1-\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{GmM}{R}\left(\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) < 0$$

$E(0^+) < 0 \Rightarrow$ órbita después es elíptica.

sea R^* y V^* el radio y la veloc. en el otro punto de retorno de esta elipse (punto B)



por cons. momento angular: $RV = R^* V^*$

$$\Rightarrow V^* = \left(\frac{R}{R^*} V\right)$$

energía en punto B $= \frac{1}{2} m(1+\beta) V^{*2} - \frac{Gm(1+\beta)M}{R^*}$

= energía en punto A justo después del choque

$$E_B = E_A(0+)$$

$$\frac{1}{2} m(1+\beta) V^{*2} - \frac{G m(1+\beta)M}{R^*} = \frac{1}{2} m(1+\beta) V^2 - \frac{G m(1+\beta)M}{R}$$

$$\frac{1}{2} V^{*2} - \frac{GM}{R^*} = \frac{1}{2} V^2 - \frac{GM}{R}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R^*}\right)^2 V^2 - \frac{GM}{R^*} = \frac{1}{2} V^2 - \frac{GM}{R}$$

pero $V^2 = \frac{4}{(1+\beta)^2} \frac{GM}{R}$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+\beta)^2}\left(\frac{R}{R^*}\right)^2 \frac{GM}{R} - \frac{GM}{R^*} = \frac{2}{(1+\beta)^2}\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R} \quad \Big/ \times \frac{R}{GM}$$

$$\underbrace{\frac{2}{(1+\beta)^2}}_{\gamma}\left(\frac{R}{R^*}\right)^2 - \frac{R}{R^*} - \left(\frac{2}{(1+\beta)^2} - 1\right) = 0$$

$$\gamma x^2 - x - (\gamma - 1) = 0 \longrightarrow \text{una sol. es } x = 1$$

la otra sol:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma(\gamma-1)}}{2\gamma} = \frac{1 \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\gamma + 1}}{2\gamma} = \frac{1 \pm (2\gamma - 1)}{2\gamma}$$

$$x_- = \frac{2 - 2\gamma}{2\gamma} = \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{(1+\beta)^2}{2} - 1$$

$$(1+\beta)^2 = 1 + 2\beta + \beta^2 = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

$$x_- = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4} = \frac{R}{R^*}$$

con esto:

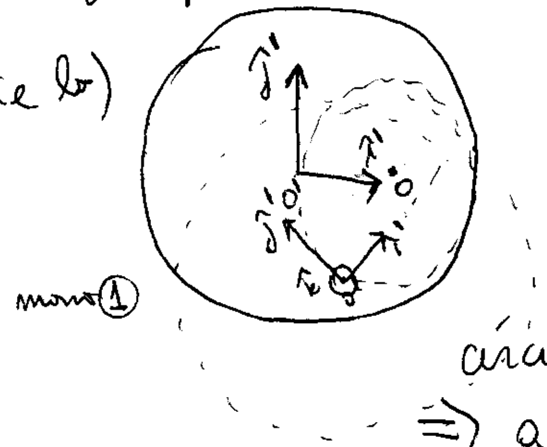
$$\boxed{R^* = \frac{4}{2\sqrt{2} - 1} R}$$

$$\boxed{R^* = 2,19\ R}$$

P2) parte a) partícula en reposo relativo c/r al cilindro $\Rightarrow$ describe un círculo de radio $R/2$ c/r al obs. inercial por lo tanto:

$$F_{za} \text{ pared} = m\omega_0^2 R/2 \quad \text{hacia el eje.}$$

parte b)



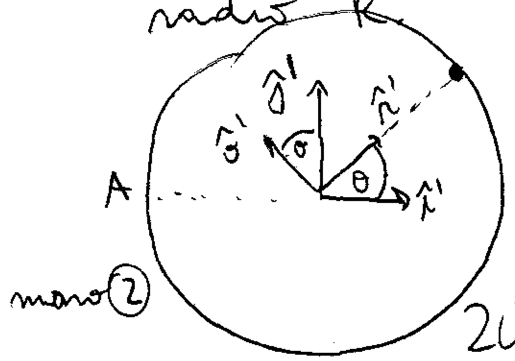
$\hat{i}', \hat{j}'$ sistema solidario al cilindro (en el centro del cilindro)

Respecto a O el S.M. O' se mueve describiendo un círculo de radio $R/2$

$$\Rightarrow \vec{a}_0 = \omega_0^2 R/2 \, (\hat{i}') \quad (\text{hacia } O)$$

$\vec{\omega} = \omega_0 (\hat{k})$ (sale)

c/r al S.M. la partícula describe un mov. circular radio R.



$$\vec{r}' = R\,\hat{r}'$$
$$\vec{v}' = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}'$$
$$\vec{a}' = -R\dot{\theta}^2(\hat{r}') + R\ddot{\theta}\,(\hat{\theta}')$$

$$2\vec{\omega}\times\vec{v}' = 2\omega_0(\hat{k})\times R\dot{\theta}(\hat{\theta}') = 2\omega_0 R\dot{\theta}\,(-\hat{r}')$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}' = \omega_0\hat{k}\times R\hat{r}' = \omega_0 R(\hat{\theta}')$$
$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \omega_0\hat{k}\times\omega_0 R(\hat{\theta}') = \omega_0^2 R\,(-\hat{r}')$$

conviene escribir $\hat{i}'$ en función de $\hat{r}'$ y $\hat{\theta}'$

$\hat{i}' = \cos\theta\,\hat{r}' - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}'$, luego:

$$m\vec{a}' = \left(m\omega_0^2 \tfrac{R}{2}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 - m2\omega_0 R\dot{\theta} - m\omega_0^2 R\right)(\hat{r}')$$
$$+\left(mR\ddot{\theta} - m\omega_0^2\tfrac{R}{2}\operatorname{sen}\theta\right)(\hat{\theta}')$$
$$= N(-\hat{r}') + \text{nada según } (\hat{\theta}')$$

$\hat{r}'$) $N = -m\omega_0^2 \frac{R}{2}\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 + m\,2\omega_0 R\dot{\theta} + m\omega_0^2 R$ (1)

$\hat{\theta}'$) $0 = mR\ddot{\theta} - m\omega_0^2 \frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta$ (2)

(2) $\Rightarrow \int_0^{\dot\theta} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = +\frac{\omega_0^2}{2}\int_0^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

la perturbación es pequeña

$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2}(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(\theta) = \omega_0\sqrt{1-\cos\theta}}$ (*)

con esto $\vec{v}' = \omega_0 R\sqrt{1-\cos\theta}\,(\hat{\theta}')$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$

del mono (1): $\vec{v}_0 = \omega_0 \frac{R}{2}(-\hat{j}')$ con $\hat{j}' = \operatorname{sen}\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}'$ mono (2)

$\vec{v} = -\omega_0\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta(\hat{r}') - \omega_0\frac{R}{2}\cos\theta(\hat{\theta}') + \omega_0 R\sqrt{1-\cos\theta}\,(\hat{\theta}') + \omega_0 R(\hat{\theta}')$

$\vec{v} = \frac{\omega_0 R}{2}\left(-\operatorname{sen}\theta(\hat{r}') + \left(\sqrt{1-\cos\theta}+1\right)^2(\hat{\theta}')\right)$

en el punto A: $\theta = \pi$: $\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}_{rel\,A} = \omega_0 R\sqrt{2}\;\hat{\theta}' \\ \vec{v}_{abs\,A} = \omega_0 R\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\hat{\theta}' \end{array}}$

rpta parte b)

c) estabilidad, En los puntos ~~estables~~ de equilibrio se tiene $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, esto en la ec (2)

$\Rightarrow 0 = 0 - m\omega_0^2\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{cases}\theta = 0 \\ \theta = \pi\end{cases} \rightarrow$ pts. estabilidad

de hecho al poner esto en ec. (1)

$\theta = 0 \Rightarrow N = m\omega_0^2\frac{R}{2}$ partícula describe círculo radio $R/2$

$\theta = \pi \Rightarrow N = m\omega_0^2\frac{3R}{2}$ " " $3R/2$

para ver si es estable hay que ver la derivada de

ec ②: $\ddot{\theta} - \frac{\omega_0^2}{2}\,\text{sen}\,\theta = 0$ → esto (deducido en clases) P2/3

$$\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\,\text{sen}\,\theta\right) = -\frac{\omega_0^2}{2}\cos\theta = \begin{cases} -\omega_0^2/2 & \text{en } \theta = 0 \text{ negativo INESTABLE} \\ +\omega_0^2/2 & \text{en } \theta = \pi \text{ positivo ESTABLE} \end{cases}$$

⇒ la frec. de peq. osc. en torno a $\theta = \pi$ es igual a

$\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ y $\boxed{T_{peq} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0}}$

comentarios: 1 para analizar estabilidad, en el fondo se analiza el comportamiento de la ec. ② para los puntos de equilibrio

En torno a $\theta_e = 0$ si se define $\xi = \theta - \theta_e = \theta - 0$

la ec. ② queda: $\ddot{\xi} - \frac{\omega_0^2}{2}\,\text{sen}\,\xi = 0$, ecuación que es inestable: $\text{sen}\,\xi = \xi - \cancel{\frac{\xi^3}{3!}} + \cancel{\frac{\xi^5}{5!}} - \ldots \Rightarrow \ddot{\xi} - \frac{\omega_0^2}{2}\xi = 0$

signo (−)

no es como la ec. del péndulo que es (y que es estable!)

$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta = 0$ signo(+)

θ chico ⇒ $\ddot{\theta} + \left(\sqrt{g/R}\right)^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{g/R}$ $T = 2\pi\sqrt{R/g}$

ec. tipo resorte

En torno a $\theta_e = \pi$, definiendo $\xi = \theta - \pi$ y acordándose que $\text{sen}(\xi + \pi) = -\text{sen}\,\xi$, entonces ec ② queda:

$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0^2}{2}\,\text{sen}\,\xi = 0$ que es estable!

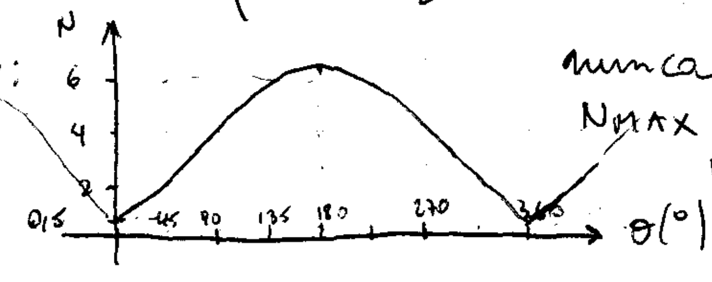
coment.

2 se puede escribir $N = N(\theta)$ (en parte b))

$$N = m\omega_0^2 R\left(-\frac{1}{2}\cos\theta + 1 - \cos\theta + 2\sqrt{1-\cos\theta} + 1\right)$$

$$N = m\omega_0^2 R\left(2 - \frac{3}{2}\cos\theta + 2\sqrt{1-\cos\theta}\right)$$

gráfico:



nunca se hace 0 ⇒ (no se separa de la pared!)

N_{MAX} ocurre en $\theta = \pi$ y vale $m\omega_0^2 R \times 6{,}3284$

Coment. 3| si se despeja el tiempo de la ec. ⊛ se obtiene: 12/4

$$t(\theta) = \frac{1}{\omega_0}\int_0^{\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\cos\xi}}$$ (tiempo que demora en ir de $\xi = 0$ a $\xi = \theta$)

pero esta integral diverge (vale ∞) en efecto

$$\cos\xi = 1 - \frac{\xi^2}{2!} + \underbrace{\frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^6}{6!}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\xi^8}{8!} - \cdots}_{\geq 0}$$ ← en $\xi \in [0,1]$

$$\cos\xi \geq 1 - \frac{\xi^2}{2} \qquad \xi\in[0,1]$$

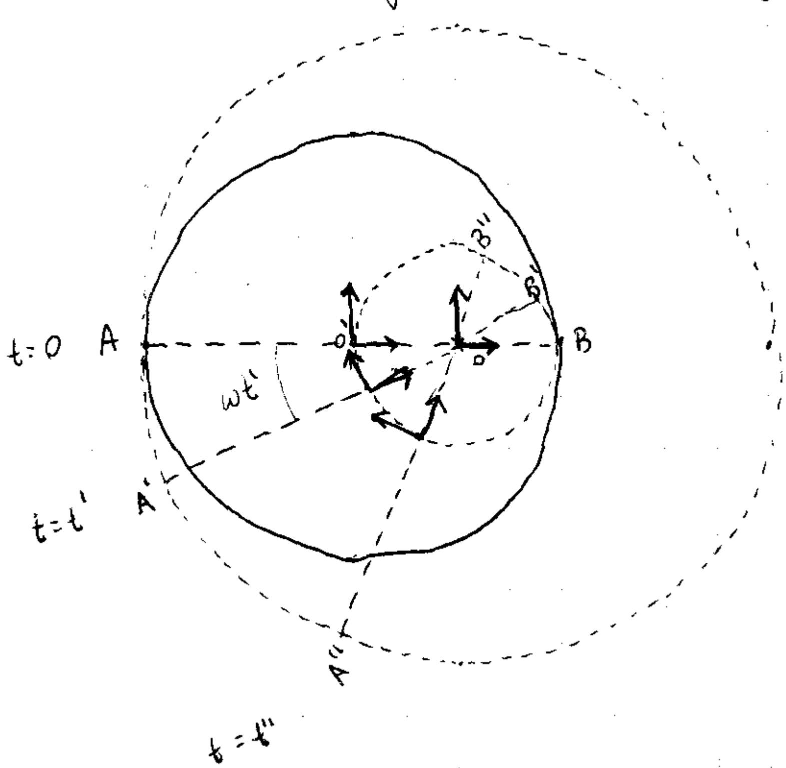
$$\Rightarrow 1-\cos\xi \leq \frac{\xi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\cos\xi} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\xi \leq \xi$$

$$\underset{\theta\in[0,1]}{\Rightarrow} \int_0^{\theta}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\cos\xi}} \geq \int_0^{\theta}\frac{d\xi}{\xi} = \ln\xi\Big|_0^{\theta} = \ln\theta - \ln 0 = +\infty$$

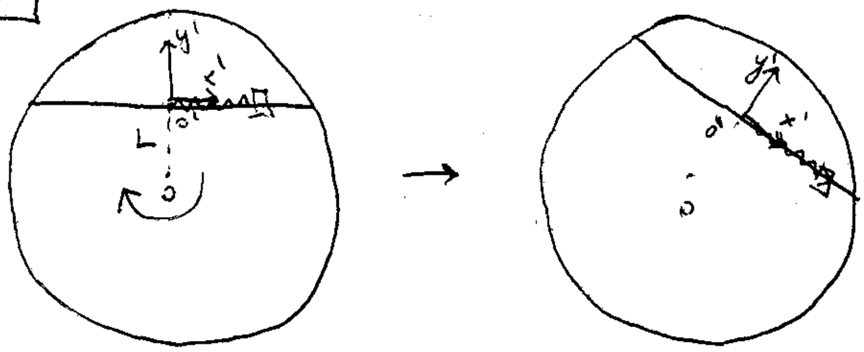
por lo cual es difícil predecir cuantas vueltas da el cilindro antes que la partícula llegue al punto A.

Coment. 4| $\overline{AB}$ = eje cilindro. que gira con ω



así se mueve el s.m. c/r al sist. inercial

P3



$\otimes \; -\hat{k}$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$

o' describe ⊙ radio L frec. ω_0 $\Rightarrow \vec{a}_0 = -\omega_0^2 L (\hat{j}')$ (de O' hacia O)

c/r al S.M. $\vec{r}\,' = x' \, \hat{\imath}'$

$\vec{v}\,' = \dot{x}' \, \hat{\imath}'$

$\vec{a}\,' = \ddot{x}' \, \hat{\imath}'$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = 2\omega_0 (-\hat{k}) \times \dot{x} (\hat{\imath}') = -2\omega_0 \dot{x} (\hat{j})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \omega_0 x \, (-\hat{k}) \times (\hat{\imath}') = \omega_0 x (-\hat{j})$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \omega_0^2 x \, (-\hat{k}) \times (-\hat{j}) = -\omega_0^2 x \, (\hat{\imath}')$$

$$m\vec{a} = -m\omega_0^2 L (\hat{j}) + m\ddot{x} (\hat{\imath}) - m 2\omega_0 \dot{x} (\hat{j}) - m\omega_0^2 x (\hat{\imath})$$

$$= (m\ddot{x} - m\omega_0^2 x) \hat{\imath} - (m\omega_0^2 L + m 2\omega_0 \dot{x}) \hat{j}$$

$$= -k(x - l_0) \; \hat{\imath} + N(-\hat{j})$$

$\hat{\imath})$ $\quad \ddot{x} - \omega_0^2 x = -\frac{k}{m}(x - l_0) \qquad (1)$

$\hat{j})$ $\quad N = m\omega_0^2 L + 2m\omega_0 \dot{x} \qquad (2)$

$$(1) \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} x = \frac{k l_0}{m} \quad (*)$$ ec. mov. (parte a)

parte b) el mov. ~~oscilo~~ resultante es oscilatorio si esto es positivo i.e. $\frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0$ i.e. ω_0 chico ó m chico ó resorte duro

en ese caso $\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega_0^2$ y $\boxed{T_{\text{per osc.}} = \frac{2\pi}{\Omega}}$

en ese caso la sol. de (*) es (homog. + part.)

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t) + B \cos(\Omega t) + \frac{k l_0}{m \Omega^2}$$

cont. P3/ en ese caso el pto de equil. es $x_{eq} = \frac{k l_0}{m \Omega^2}$

$$\boxed{x_{eq} = \frac{k/m}{k/m - \omega_0^2} l_0} > l_0$$

$$x(t=0) = l_0 = A \cancel{\operatorname{sen} 0}^{0} + B \cancel{\cos 0}^{1} + \frac{k l_0}{m\Omega^2} \Rightarrow B = -\frac{k l_0}{m\Omega^2} + l_0$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = A\Omega \cancel{\cos 0}^{1} - B\Omega \cancel{\operatorname{sen} 0}^{0} \Rightarrow A = 0$$

parte con reposo relativo

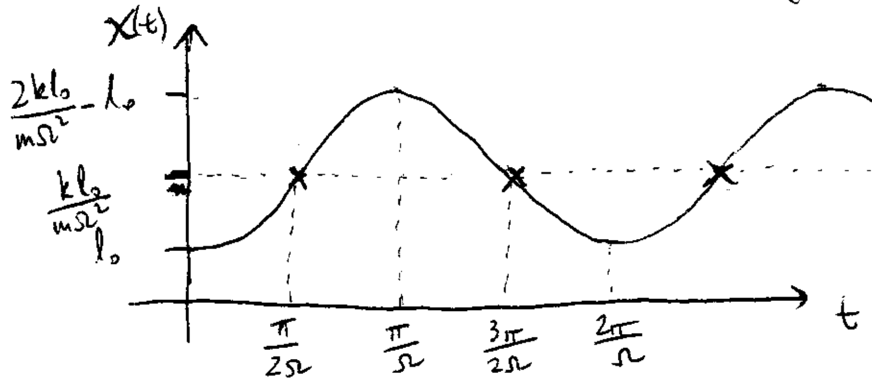
con lo cual $x(t) = \frac{k l_0}{m\Omega^2} - \left(\frac{k l_0}{m\Omega^2} - l_0\right) \cos \Omega t$

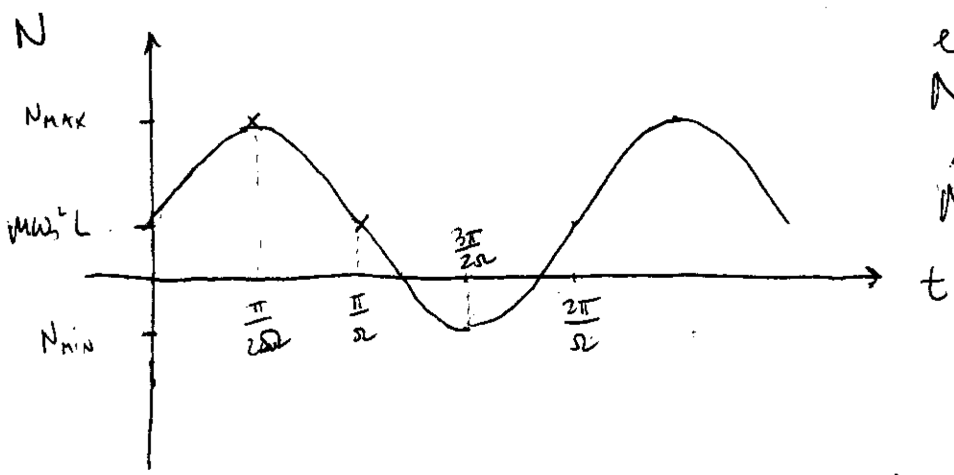
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = +\left(\frac{k l_0}{m\Omega^2} - l_0\right)\Omega \operatorname{sen} \Omega t$$

con lo cual el valor max. de N se obtiene cuando $\operatorname{sen} \Omega t = 1 \Rightarrow$ ($\cos \Omega t = 0$, o sea cuando pasa por x_{equil})

$$N = m\omega_0^2 L + 2m\omega_0\Omega l_0 \left(\frac{k}{m\Omega^2} - 1\right) \operatorname{sen}(\Omega t)$$

$$N_{MAX} = m\omega_0^2 L + 2m\omega_0\Omega l_0 \left(\frac{k}{m\Omega^2} - 1\right)$$





eventualmente N cambia de sentido
se puede ver que N no cambia de sentido si

$$\frac{L}{L_0} > \frac{2\omega_0}{\sqrt{k/m - \omega_0^2}}$$

(*): Si $k/m - \omega_0^2 < 0$ entonces la sol. es:

$$x(t) = A \operatorname{senh}(\Omega t) + B \cosh(\Omega t) + \frac{-k l_0}{m\Omega^2} \quad \text{con } \Omega^2 = \omega_0^2 - k/m$$

$$x(t=0) = l_0 = A \cancel{\operatorname{senh} 0}^{0} + B \cancel{\cosh(0)}^{1} + \frac{-k l_0}{m\Omega^2} \quad B = l_0\left(1 + \frac{k}{m\Omega^2}\right) \text{ (al revés)}$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = A\Omega \cancel{\cosh}^{1} 0 + B\Omega \cancel{\operatorname{senh} \Omega 0}^{0} \Rightarrow A = 0$$

$$x(t) = \frac{-k l_0}{m\Omega^2} + l_0\left(1 + \frac{k}{m\Omega^2}\right)\cosh(\Omega t)$$