FI-2001 **MECANICA**
Prof. Patricio Cordero S.
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

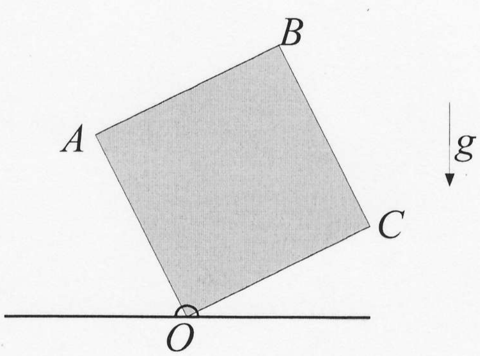
Ejercicio N° 9
12 de junio, 2009
Duración: 1:00 hr

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

---

1) Determine el momento de inercia I^G de un cubo de masa total M, densidad uniforme y arista a, donde G es su centro de masa.

2) Determine el momento de inercia $I^{\mathcal{O}}$ del mismo cubo, donde $\mathcal{O}$ es un punto al centro de una de sus aristas.

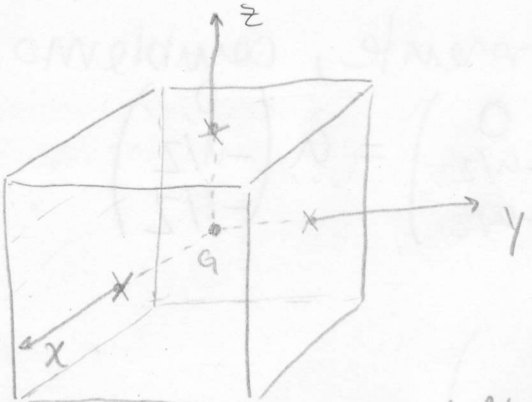


3) Suponga que este cubo puede rotar libremente en torno a la arista que contiene al punto $\mathcal{O}$ y esta arista está articulada con el suelo (horizontal). Si el cubo es soltado desde el reposo de manera que la arista opuesta está justo sobre la arista en contacto con el suelo (B está sobre $\mathcal{O}$) determine la velocidad con que el punto C golpea al suelo.

Haga figuras claras, muestre con claridad total qué ejes coordenados está considerando etc. Debe ser claro y ordenado en todos sus desarrollos.

Ejercicio 9

1) Si tenemos un cubo de arista "a", tenemos



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$\rho = cte = \frac{M}{a^3} = \frac{dm}{dv} \qquad (dv = dx\,dy\,dz)$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{M}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{M}{a^2}\left[\iint_{-a/2}^{a/2} y^2\, dy\,dz + \iint_{-a/2}^{a/2} z^2\, dy\,dz \right] = \frac{M}{a^2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{a}{3}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{-a}{2}\right)^3 \right) \right]$$

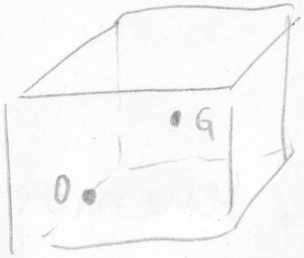
$$\boxed{I_{xx} = \frac{1}{6} M a^2}$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{zy}$$

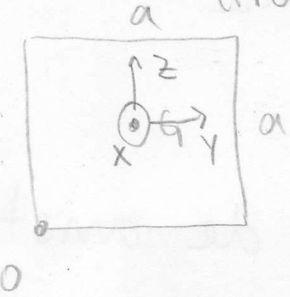
$$I_{xy} = \frac{-M}{a^3} \iiint xy\, dx\,dy\,dz = \frac{-M}{a^3} \overbrace{\int_{-a/2}^{a/2} x\,dx}^{0} \int_{-a/2}^{a/2} y\, dy \int_{-a/2}^{a/2} dz = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}^G = \frac{1}{6} M a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

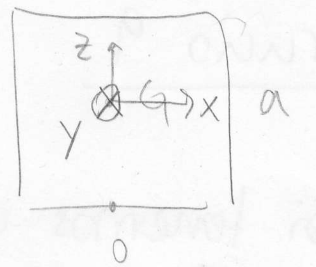
2) De perspectiva,



(Frente)



(costado



Según los ejes referidos anteriormente, cambiemos el origen según el vector $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a/2 \\ -a/2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Así

$$\mathbb{I}^O = \frac{1}{6} Ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = Ma^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/12 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 5/12 \end{pmatrix}$$

3) Sabemos que la energía, respecto UN PUNTO FIJO se determina por

$$E = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \, \mathbb{I}^O \, \vec{\Omega} + U_g(\vec{r}_G)$$

Ahora, $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Tiene rotación solo según el eje x.

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} Ma^2 \Omega_x^2 \, (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/12 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 5/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + mgy_G$$

$$E = \frac{1}{2} Ma^2 \Omega_x^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + mgy_G$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \overbrace{\left(\frac{2}{3} Ma^2 \right)}^{I_x^O} \Omega_x^2}_{K} + mgy_G$$

I_x^O: inercia c/r a un eje paralelo a x que pase por O.

* Notemos $K = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} Ma^2\right)\Omega_x^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} Ma^2 + \frac{1}{6} Ma^2\right)\Omega_x^2$$

$$= \frac{1}{2} M \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \Omega_x\right)}_{V_G}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{6} Ma^2\right)}_{I_x^G} \Omega_x^2$$

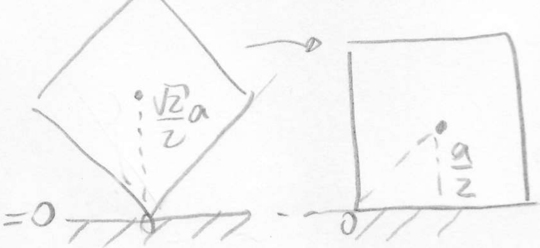
V_G: velocidad del centro de masa

I_x^G: Inercia c/r al eje x que pase por el centro de masa.

Así $E = \frac{1}{2} M \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \mathbb{I}^G \vec{\Omega} + Mgy_G$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \mathbb{I}^O \vec{\Omega} + Mgy_G$$

con "O" un punto fijo.



Inicialmente o (parte del reposo) $y=0$

$$E_i = \frac{1}{3} Ma^2 \cancel{\Omega_{x_0}^2} + Mg\frac{\sqrt{2}}{2}a \longrightarrow E_i = Mg\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$E_f = \frac{1}{3} Ma^2 \Omega_{x_f}^2 + Mg\frac{a}{2}$$

Igualando $\longrightarrow$ $\cancel{M}g\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{a} = \frac{1}{3}\cancel{M}a^{\cancel{2}}\Omega_{x_f}^2 + \cancel{M}g\frac{\cancel{a}}{2}$

$$\Omega_{x_f}^2 = \frac{3g}{2a}(\sqrt{2}-1)$$

$$\Omega_{x_f} = \left[\frac{3}{2}\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)\right]^{1/2}$$

$\therefore$ la velocidad del pto C:

$$V_C = \boxed{a \cdot \Omega_{x_f}} \quad //$$

Esto porque al ser sólido rígido, todo el cuerpo se mueve con la misma velocidad angular //.