

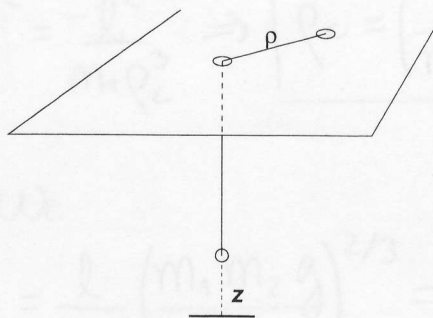
FI-2001 **MECANICA**

Prof. Patricio Cordero S.
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Ejercicio N° 6
15 de mayo, 2009
Duración: 1:00 hr

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible.
Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado
están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

- Se tiene una partícula de masa m_1 deslizando sin roce por un plano horizontal con momento angular conocido de magnitud ℓ . Un hilo une a esta partícula, pasa por un agujero (ver figura) y tiene en su otro extremo, una partícula de masa m_2 colgando en forma siempre vertical.



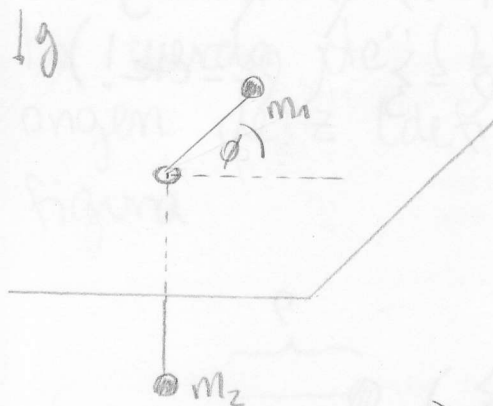
1. Si el movimiento de P1 es circular, encuentre el radio ρ_C de su órbita.
2. Deduzca la expresión para la velocidad angular (frecuencia angular) ω_C del movimiento circular.
3. Si el movimiento circular es levemente perturbado, el radio ρ de la nueva órbita tiene pequeñas oscilaciones en torno al valor ρ_C . Encuentre la frecuencia angular ω_{po} de estas oscilaciones y obtenga el valor del cociente

$$\frac{\omega_{po}^2}{\omega_C^2}$$

Los datos son m_1 , m_2 , g y ℓ .

En su razonamiento debe usar principios básicos: ecuaciones de movimiento, variación o conservación del momento angular, variación o conservación de la energía y pocos más.

Ejercicio 6



1) $\rho = \text{cte.}; l = \text{cte.}$ (conocido).

$$\hat{e}_l \cdot -T = m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)$$

pero; si $\rho = \rho_c \Rightarrow T = m_2 g \wedge \ddot{\rho} = 0$

$$2^{\text{do}}: l = m_1 \rho^2 \dot{\phi} \rightarrow m_1 \rho \dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{m_1 \rho^3} \quad (*)$$

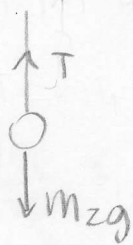
$$\Rightarrow -m_2 g = -m_1 \rho \dot{\phi}^2 = -\frac{l^2}{m_1 \rho^3} \Rightarrow \boxed{\rho_c = \left(\frac{l^2}{m_1 m_2 g} \right)^{1/3}}$$

2) si $l \wedge \rho_c$ son ctes $\Rightarrow \dot{\phi} = \text{cte} = \omega_c$

$$\Rightarrow l = m_1 \rho_c^2 \omega_c \Rightarrow \omega_c = \frac{l}{m_1 \rho_c^2} = \frac{l}{m_1} \left(\frac{m_1 m_2 g}{l^2} \right)^{2/3} = \frac{1}{l^{1/3}} \frac{(m_2 g)^{2/3}}{m_1^{1/3}}$$

$$\therefore \boxed{\omega_c = \left(\frac{m_2^2 g^2}{m_1 l} \right)^{1/3}}$$

3) si definimos $\vec{z} = z \hat{j} \Rightarrow \ddot{\vec{z}} = \ddot{z} \hat{j}$



$$\text{Así } \hat{j} \cdot m_2 \ddot{\vec{z}} = T - m_2 g \rightarrow T = m_2 \ddot{z} + m_2 g$$

Además, como está definido $z \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\rho}$

$$\Rightarrow T = m_2(\ddot{\rho} + g)$$

(
explicación en la
pág 3

$$\Rightarrow -m_2(\ddot{\rho} + g) = m_1\left(\ddot{\rho} - \frac{l^2}{m_1^2 \rho^3}\right) \quad (\text{De la ec. inicial})$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} - \frac{l^2}{m_1^2 \rho^3} + m_2 g = 0$$

$$l^2 = (m \rho^2 \dot{\phi})^2 = m^2 \rho^4 \dot{\phi}^2 = m^2 \rho^3 (\rho \dot{\phi}^2)$$

Si se perturba entorno al mov. circular $\Rightarrow \rho = \rho_c + \xi$
 donde ξ es una pequeña perturbación $\Rightarrow \ddot{\rho} = \ddot{\xi}$ ($\rho_c = \text{cte!}$)

$$\Rightarrow \ddot{\xi} - \frac{l^2}{(m_1 + m_2)m_1(\rho_c + \xi)^3} + \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)} = 0$$

Ahora $\frac{1}{(\rho_c + \xi)^3} = (\rho_c + \xi)^{-3} = \frac{1}{\rho_c^3} \left(1 + \frac{\xi}{\rho_c}\right)^{-3} \approx \frac{1}{\rho_c^3} \left(1 - 3\frac{\xi}{\rho_c}\right)$

$$\Rightarrow \ddot{\xi} + \underbrace{\frac{3l^2}{(m_1 + m_2)m_1\rho_c^4}}_{>0} \xi = \underbrace{\frac{l^2}{m_1(m_1 + m_2)\rho_c^3}}_{=0} - \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \text{MAS}$$

(ya que ρ_c es ρ de equilibrio)

$$\Rightarrow \omega_{\rho_0}^2 = \frac{3l^2}{(m_1 + m_2)m_1\rho_c^4}$$

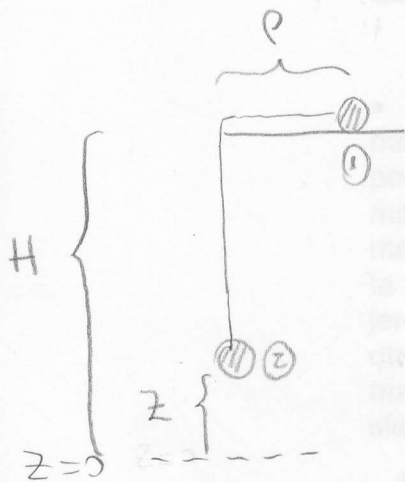
$$\Rightarrow \frac{\omega_{\rho_0}^2}{\omega_c^2} = \frac{3l^2}{(m_1 + m_2)m_1\rho_c^4} \cdot \frac{m_1^2 \rho_c^4}{l^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot 3$$

Con energía.

$$E = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\phi})^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{z}^2) + m_2 g z$$

Con la misma definición anterior, suponiendo el largo de la cuerda cte (L) y una distancia cte desde el origen de z (definiendo la H) como se ve en la figura

OJO: ρ NO es cte.



$$\Rightarrow L = \rho + (H - z) \Rightarrow z = \rho + H - L = \rho + \text{cte}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{\rho}$$

$$L^2 = m^2 \rho^4 \dot{\phi}^2 = m^2 \rho^2 (\rho \dot{\phi})^2$$

Tenemos:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\rho}^2}_{\neq(p)} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L^2}{m_1 \rho^2} + m_2 g \rho + \text{cte}}_{U_{\text{ef}}(\rho)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_{\text{ef}}}{\partial \rho} = -\frac{L^2}{m_1 \rho^3} + m_2 g \Rightarrow \text{si } \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0 \rightarrow \rho_c = \left(\frac{L^2}{m_1 m_2 g} \right)^{1/3}$$

(Oh... el mismo ρ_c de (1))

$$\frac{\partial^2 U_{\text{ef}}}{\partial \rho^2} = \frac{3L^2}{m_1 \rho^4} > 0 \text{ (equilibrio!)}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U_{\text{ef}}}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_c} = \frac{3L^2}{m_1 \rho_c^4} \Rightarrow \omega_{\rho}^2 = \frac{3L^2}{m_1 \rho_c^4} \cdot \frac{1}{(m_1 + m_2)} = \frac{3L^2}{m_1 (m_1 + m_2) \rho_c^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{\rho}^2}{\omega_c^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot 3 \quad \parallel$$