Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Física y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-Mécanica

Profesor Auxiliar: Pablo Galaz

Estabilidad en orbitas circulares

Si analizamos de la forma más general una fuerza central del tipo:

$$\vec{F}(r) = -F(r)\hat{r} \qquad (1)$$

podemos escribirla de la siguiente forma en coordenadas polares:

$$-F(r) = m(\ddot{r} - r\ddot{\theta}) = m(\ddot{r} - \frac{l_0^2}{r^3}) \qquad (2)$$

recordando que en fuerzas centrales, $l_0 = r^2\dot{\theta} = rv_{tg} = cte \quad \forall t$.

Así, si consideramos que el orbital es circular:

$$r = a = cte \Rightarrow \ddot{r} = 0 \qquad (3)$$

De esta forma, tenemos de (2):

$$F(r) = m\frac{l_0^2}{r^3} \qquad (4)$$

Aquí cabe destacar que cuando decimos *"la partícula tiene una orbita circular"* de radio $r=a$, entonces imponemos que el sistema alcanza un equilibrio estable en dicho punto. En particular, la fuerza percibida a esa distancia es de:

$$F(a) = m\frac{l_0^2}{a^3} \qquad (5)$$

Ahora bien, si nosotros introducimos una pequeña perturbación radial, definida como ξ, entorno al punto de equilibrio tendremos que:

$$r = a + \xi \Rightarrow \ddot{r} = \ddot{\xi} \qquad (6)$$

Así, reemplazando en (2):

$$\Rightarrow -F(a+\xi) = m(\ddot{\xi} - \frac{l_0^2}{(a+\xi)^3}) \qquad (7)$$

Como hablamos de una pequeña perturbación (ie, ξ es muy pequeño) podemos hacer un desarrollo de Taylor de orden 1 para aproximar la parte izquierda de la ecuación (7):

$$F(r) = F(a+\xi) = F(a) + F'(a)\xi + \ldots \tag{8}$$

Luego, podemos hacer otra aproximación para el lado derecho de la ecuación (7):

$$\frac{1}{(a+\xi)^3} = \frac{1}{a^3(1+\frac{\xi}{a})^3} = \frac{1}{a^3}(1+\frac{\xi}{a})^{-3} \approx \frac{1}{a^3}(1-3\frac{\xi}{a}) \tag{9}$$

Por lo tanto, si reemplazamos (8) y (9) en (7):

$$\Rightarrow -F(a) - F'(a)\xi = m\ddot{\xi} - m\frac{l_0^2}{a^3} + \frac{3ml_0^2\xi}{a^4} \tag{10}$$

Y gracias a la ecuación (5) podemos simplificar, llegando a una expresión de la forma:

$$\ddot{\xi} + \frac{3F(a) + aF'(a)}{ma}\xi = 0 \tag{11}$$

Así, para que (11) sea la ecuación de un movimiento armónico simple se debe tener que:

$$3F(a) + aF'(a) > 0 \tag{12}$$

Ejemplo:

Analicemos la siguiente fuerza: $\vec{F}(r) = -kr^n\hat{r}$

Consideremos que $r=a$ es el radio donde la partícula logra un equilibrio estable.
Así, para analizar el término expresado en la ecuación (12), tenemos:

$$F(r) = kr^n \Rightarrow F(a) = ka^n$$

$$F'(r) = nkr^{n-1} \Rightarrow F'(a) = nka^{n-1}$$

(Hay que recordar cómo identificar $F(r)$. Para eso ver (1))
Reemplazando tenemos que:

$$\Rightarrow 3F(a) + aF'(a) = 3(ka^n) + a(nka^{n-1}) = (3+n)ka^n > 0 \qquad \forall n > -3$$

Por lo tanto, si una partícula percibe una fuerza de la forma $\vec{F}(r) = -kr^n\hat{r}$, donde existe un punto de equilibrio que le permite generar una órbita circunferencial, ésta es estable solo si $n>-3$.