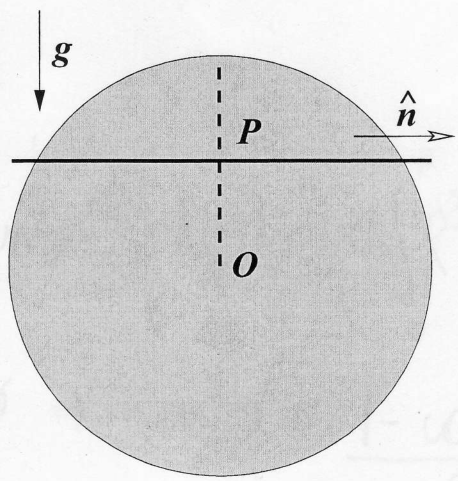
FI-2001 **MECANICA**
Prof. Patricio Cordero S.
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Ejercicio N° 11
ejercicio optativo
26 de junio, 2009
Duración: 1:00 hr

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

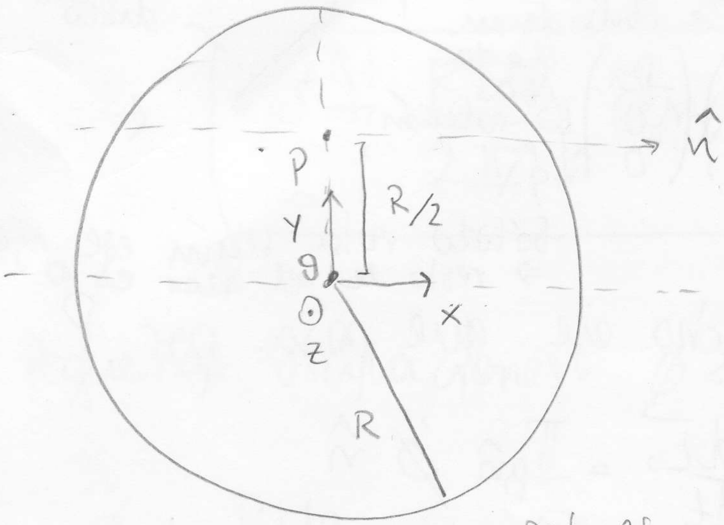
Se tiene una placa circular de radio R y densidad de masa uniforme $\sigma_0 = \frac{M}{\pi R^2}$ que puede oscilar, debido a su propio peso, en torno a un eje fijo horizontal (dirección $\hat{n}$) que coincide con una cuerda del círculo a distancia $\frac{R}{2}$ del centro $\mathcal{O}$ (ver figura).



1. Determine los momentos de inercia $I_{\mathcal{O},\hat{n}}$ y $I_{P,\hat{n}}$.
2. Obtenga la ecuación de movimiento.
3. Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

Ejercicio 11

1)



En polares

$x = \rho \cos\phi$

$y = \rho \operatorname{sen}\phi$

$$\mathbb{I}_{\theta,\hat{n}} = \sigma_0 \int (y^2 + \cancel{z^2}^{\,0})\, dv \overset{\text{polares}}{=} \sigma_0 \int (\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi)\, \rho\, d\rho\, d\phi = \sigma_0 \int_0^R \rho^3 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi$$

$$\cos 2\phi = \cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi = 1 - 2\operatorname{sen}^2\phi \Rightarrow \operatorname{sen}^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{\theta,\hat{n}} = \frac{M}{\pi \cancel{R^2}} \cdot \frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos 2\phi\, d\phi = \frac{MR^2}{\pi 4} \cdot \frac{1}{2} \left(\phi - \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

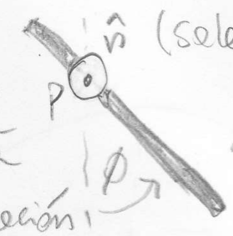
$$\mathbb{I}_{\theta,\hat{n}} = \frac{MR^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} (2\pi) \longrightarrow \boxed{\mathbb{I}_{\theta,\hat{n}} = \frac{MR^2}{4}}$$

$$\mathbb{I}_{P,\hat{n}} = \mathbb{I}_{\theta,\hat{n}} + M \|\overrightarrow{\theta P}\|^2 = \frac{MR^2}{4} + M \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{MR^2}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbb{I}_{P,\hat{n}} = \frac{MR^2}{2}}$$

2) La ecuación se puede obtener de 2 formas

a) $\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{\tau}_P$. Mirando de lado →



Hay más componentes, pero no se consideran dada la rotación

$$\vec{L}_P = \mathbb{I} \cdot \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{P,\hat{n}} & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \hat{n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sólido rota según ese eje
→ resto de vel. ~~ciar~~ es 0.

En este caso, $\vec{\Omega} = \Omega \hat{n} \equiv \dot{\phi} \hat{n}$.
y la inercia asociada a dicho eje que pasa por P.

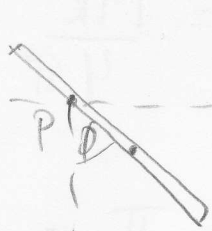
$$\Rightarrow \quad \vec{L}_P = \underbrace{\mathbb{I}_{P,\hat{n}}}_{\text{cte}} \underbrace{\dot{\phi}}_{\text{no cte!}} \underbrace{\hat{n}}_{\text{cte}} \longrightarrow \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \mathbb{I}_{P,\hat{n}} \ddot{\phi} \hat{n}$$

$$\vec{\tau}_P = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{R}{2} \cdot Mg \cdot \operatorname{sen}\phi \, (-\hat{n})$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{P,\hat{n}} \ddot{\phi} = -\frac{R}{2} Mg \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} + \frac{RMg}{2\mathbb{I}_{P,\hat{n}}} \operatorname{sen}\phi = 0}$$

a) Por energía.



$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \mathbb{I}_{P,\hat{n}} \vec{\Omega}}_{= \mathbb{I}_{P\hat{n}} \dot{\phi}^2} - \underbrace{Mg\frac{R}{2} \operatorname{sen}\phi}_{\text{Potencial definido por el centro de masa}}$$

$$E = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{P,\hat{n}} \dot{\phi}^2 - Mg\frac{R}{2} \cos\phi.$$

Como no hay fzas disipativas $\Rightarrow E = cte$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{\cancel{2}} \mathbb{I}_{p,\hat{n}} \cdot \cancel{2}\dot{\phi}\ddot{\phi} + Mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\phi \cdot \dot{\phi} = 0 \; / \; \dot{\phi} \cdot \mathbb{I}_{p,\hat{n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} + \frac{RMg}{2\mathbb{I}_{p,\hat{n}}} \operatorname{sen}\phi = 0}$$

3) Pequeñas oscilaciones $\phi \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi \approx \phi$

$$\ddot{\phi} + \frac{RMg}{2\mathbb{I}_{p,\hat{n}}} \phi = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{RMg}{2\mathbb{I}_{p,\hat{n}}} \quad //$$

En nuestro caso. $\mathbb{I}_{p,\hat{n}} = \frac{MR^2}{2}$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\phi = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R} \quad //$$