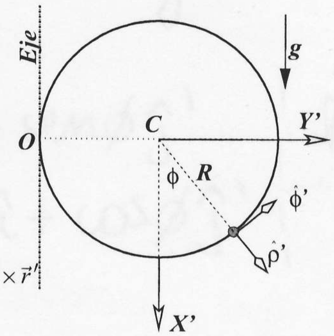
FI-2001 **MECANICA**
Prof. Patricio Cordero S.
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Ejercicio N° 8
5 de junio, 2009
Duración: 1:00 hr

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

Un aro de radio R gira en torno a un eje vertical—tangente al aro en el punto O (ver figura)—con velocidad angular Ω. Una partícula de masa m puede moverse a lo largo del aro sin roce alguno. Se define un sistema de referencia no inercial S' centrado en el centro C del aro y con ejes X' e Y' como indica la figura. Como se sabe, la ecuación de movimiento genérica en un sistema no inercial es

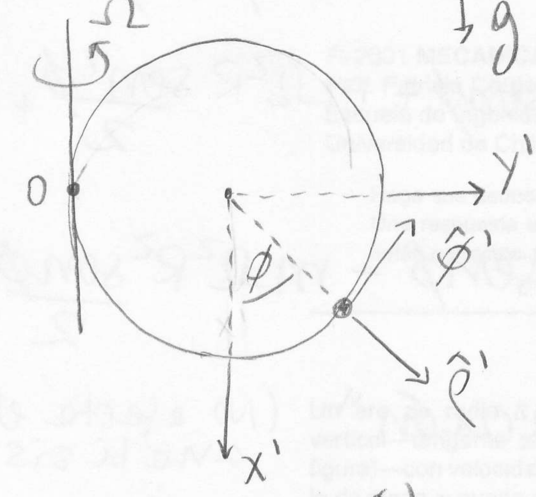
$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' \tag{1}$$

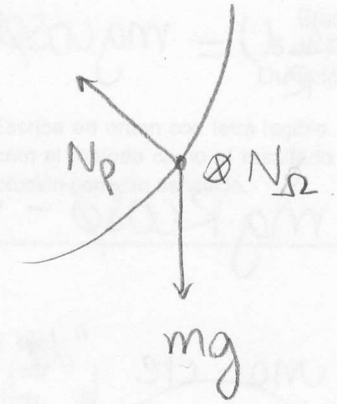


1. Escriba $\vec{g}$ y $\vec{\Omega}$ en términos de $(\hat{\rho}', \hat{\phi}')$ y obtenga $\hat{\imath}' \times \hat{\rho}'$ y $\hat{\imath}' \times \hat{\phi}'$.
2. Escriba explícitamente y en forma separada los tres primeros terminos $m\vec{a}'$, $\vec{F}$ y $-m\ddot{\vec{R}}$.
3. Calcule la fuerza centrífuga y la de Coriolis.
4. Escriba la ecuación de movimiento proyectada a la dirección $\hat{\phi}'$ en la forma $mR\ddot{\phi} = f$.
5. Obtenga U tal que $f = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\phi}$ dando la expresión para U.
6. Suponiendo que $R\Omega^2 \ll g$, ¿aproximadamente cuánto debe valer al ángulo ϕ_0 asociado al punto de equilibrio de U cercano a $\phi = 0$? El resultado tiene que ser proporcional a alguna potencia positiva de Ω.

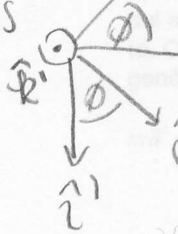
INDICACIÓN: *Es conveniente usar en S' tanto los vectores unitarios cartesianos $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$ como también los vectores polares $(\hat{\rho}', \hat{\phi}')$.*

Ejercicio 8





1) Tenemos



$$\hat{\rho}' = \cos\phi\,\hat{\imath}' + \text{sen}\phi\,\hat{\jmath}'$$
$$\hat{\phi}' = -\text{sen}\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}'$$
$$\hat{k}' = \hat{\imath}' \times \hat{\jmath}' = \hat{\rho}' \times \hat{\phi}'$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\imath}' \times \hat{\rho}' = \text{sen}\phi\,\hat{k}' \quad \wedge \quad \hat{\imath} \times \hat{\phi}' = \cos\phi\,\hat{k}$$

2)
$$m\vec{a}' = m(-R\dot{\phi}^2\hat{\rho}' + R\ddot{\phi}\hat{\phi})$$
$$\vec{F} = mg\hat{\imath}' - N_\rho\hat{\rho}' - N_\Omega\hat{k}' = mg(\cos\phi\,\hat{\rho} - \text{sen}\phi\,\hat{\phi}') - N_\rho\hat{\rho}' - N_\Omega\hat{k}'$$
$$-m\ddot{\vec{R}} = -(-mR\Omega^2\hat{\jmath}') = mR\Omega^2(\text{sen}\phi\,\hat{\rho}' + \cos\phi\,\hat{\phi}')$$

3)
$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = -m(-\Omega\hat{\imath}') \times (-\Omega\hat{\imath} \times R\hat{\rho}') = -m\Omega^2 R\,\hat{\imath}' \times \overbrace{(\hat{\imath}' \times \hat{\rho}')}^{\text{sen}\phi\,\hat{k}'}$$

ya que $\hat{\imath}' \times \hat{k}' = -\hat{\jmath}'$

$$= -m\Omega^2 R\,\text{sen}\phi\,\hat{\jmath}' = m\Omega^2 R\,\text{sen}\phi\,(\text{sen}\phi\,\hat{\rho}' + \cos\phi\,\hat{\phi}')$$

$$-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = -2m(-\Omega\hat{\imath}' \times R\dot{\phi}\hat{\phi}) = 2m\Omega R\dot{\phi}\,\hat{\imath}' \times \hat{\phi}$$
$$= 2m\Omega R\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{k}'$$

$$-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0 \quad (\text{pues } \Omega \text{ es cte})$$

4) De la ec (1) expresada en el enunciado, tomemos solo los términos en la componente $\hat{\phi}'$

$$\Rightarrow \hat{\phi}' \Big| \quad mR\ddot{\phi} = -mg\,\text{sen}\phi + mR\Omega^2\cos\phi + m\Omega^2 R\,\text{sen}\phi\cos\phi \equiv f$$

5) $f = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dU}{d\phi} \Rightarrow -\dfrac{1}{R}U = mg\cos\phi + mR\Omega^2\text{sen}\phi + m\Omega^2 R\dfrac{\text{sen}^2\phi}{2} + \text{cte}$

$$\Rightarrow U(\phi) = -mgR\cos\phi - mR^2\Omega^2\text{sen}\phi - m\Omega^2R^2\frac{\text{sen}\phi}{2} + U_0$$

donde U_0 es una cte "de libre elección" (No afecta el análisis)

6) $\dfrac{dU}{d\phi} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (por parte 5)

Encontremos ϕ_0 que cumple dicha condición:

$$f = 0 \Rightarrow \quad g\,\text{sen}\phi_0 = R\Omega^2\cos\phi_0(1 + \text{sen}\phi_0)$$

$$\frac{g}{R\Omega^2}\text{tg}\phi_0 = 1 + \text{sen}\phi_0$$

Si $\phi_0 \approx 0 \rightarrow \left.\begin{matrix}\text{sen}\phi_0 \approx \phi_0 \\ \cos\phi_0 \approx 1\end{matrix}\right\} \text{tg}\phi_0 \approx \phi_0$

$$\Rightarrow \frac{g}{R\Omega^2}\phi_0 = 1 + \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{R\Omega^2}{g}(1 + \phi_0)$$

$$\Rightarrow \phi_0\Big(1 - \underbrace{\frac{R\Omega^2}{g}}_{\ll 1 \text{ (por enunciado)}}\Big) = \frac{R\Omega^2}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_0 \approx \frac{R}{g}\Omega^2}$$