

## Capítulo 8

# Sistemas extendidos

### 8.1. Repaso

#### 8.1.1. Centro de masa $G$ y posiciones con respecto a $G$

En la sección §2.2 se dio algunas de las definiciones básicas necesarias para describir sistemas de muchas partículas. Entre ellos, la masa total del sistema y la posición y velocidad del centro de masa,

$$M = \sum_{k=1}^N m_a, \quad \vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \vec{r}_a, \quad \vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a \quad (8.1.1)$$

El centro de masa tiene como ecuación de movimiento

$$M \frac{dV_G}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad \text{donde} \quad \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{a=1}^N \vec{F}_a \quad (8.1.2)$$

y se demostró que la fuerza a la derecha es la suma de las fuerzas externas sobre el sistema.

La posición de de la partícula  $a$  se puede descomponer según

$$\vec{r}_a = \vec{R}_G + \vec{\rho}_a \quad (8.1.3)$$

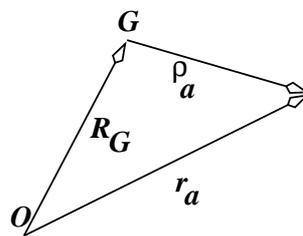


Figura 8.1: Si  $G$  es el centro de masa,  $\vec{R}_G$  es la posición de  $G$  y  $\vec{\rho}_a$  es el vector posición de la partícula  $a$  desde  $G$ .

### 8.1.2. Momento angular

En §2.2 también se definió el momento angular total del sistema y se vio que obedece a la ecuación

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (8.1.4)$$

Hasta aquí se ha trabajado sólo con un sistema inercial  $S$ .

También se define

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_G &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \vec{v}_a \\ &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

y el momento angular de la masa total ubicada en el centro de masa

$$\vec{\ell}_O^G = M \vec{R}_G \times \vec{V}_G \quad (8.1.6)$$

de modo que se cumple que

$$\vec{\ell}_O = \vec{\ell}_O^G + \vec{\ell}_G \quad (8.1.7)$$

La dinámica de  $\vec{\ell}_G$  se obtiene a partir de tomar la derivada  $\dot{\vec{\ell}}_G = \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \ddot{\vec{\rho}}_a$  y hacer uso de que  $m_a \ddot{\vec{\rho}}_a = m_a \ddot{\vec{r}}_a - m_a \ddot{\vec{R}}_G$ . El primer término es la fuerza total  $\vec{F}_a$  sobre la partícula  $a$  mientras que el segundo, al sumar sobre  $a$  se anula porque queda  $(\sum_a m_a \vec{\rho}_a) \times \ddot{\vec{R}}_G$  por lo cual

$$\dot{\vec{\ell}}_G = \vec{\tau}_G \equiv \sum_a \vec{\rho}_a \times \vec{F}_a \quad (8.1.8)$$

Todo esto fue visto en el capítulo 2. También se vio que

$$\begin{aligned} \tau_O &= \vec{R}_G \times \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} + \sum_a \vec{\rho}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \vec{\tau}_O^G + \vec{\tau}_G \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

de modo que también

$$\dot{\ell}_O^G = \tau_O^G \quad (8.1.10)$$

## 8.2. Momento angular y matriz de inercia

### 8.2.1. Generalidades

Por el momento se supondrá que se tiene un sistema extendido que consta de  $N$  masas puntuales,  $m_a$ , con posiciones  $\vec{r}_a$  con respecto al sistema inercial  $S$ . Si se designa  $\vec{R}$  al vector que va desde  $\mathcal{O}$  al origen  $\mathcal{O}'$  se tiene que

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}_a' \Rightarrow \vec{v}_a = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \quad (8.2.1)$$

Relacionaes similares pero usando  $S''$  en lugar de  $S'$  se onbtiene

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}_a'' \Rightarrow \vec{v}_a = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_a'' \quad (8.2.2)$$

ya que la velocidad angular asociada a  $S''$  es cero. Comparando ambas relaciones es claro que  $\vec{v}_a'' = \vec{\Omega} \times \vec{r}_a'$ .

De 8.2.1 se desprende que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}} = \sum_a m_a \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_a m_a \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a') + \sum_a m_a \vec{r}_a' \times \dot{\vec{R}} + \sum_a m_a \vec{r}_a' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a') \quad (8.2.3)$$

En el segundo y tercer término del lado derecho hay factores que no dependen del índice  $a$ , por lo que pueden ser factorizados fuera de la suma y las sumas quedan reducidas a  $\sum_a m_a \vec{r}_a'$  que no es sino  $M\vec{R}'$ , donde  $\vec{R}'$  es la posición del centro de masa del sistema en el sistema  $S'$ , de modo que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}} = \sum_a m_a \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}') + M\vec{R}' \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\sum_a m_a \vec{r}_a' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a')}_{(*)} \quad (8.2.4)$$

El último término puede ser reducido a una forma de gran interés. Se comienza haciendo uso de la identidad vectorial  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$ .

$$(*) = \sum_a \left( r_a'^2 \vec{\Omega} - \vec{r}_a' \cdot \vec{\Omega} \vec{r}_a' \right)$$

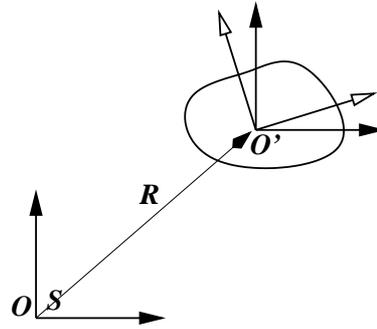


Figura 8.2: Se tiene un sistema inercial  $S$  con origen en  $\mathcal{O}$  y dos sistemas con origen en el punto  $\mathcal{O}'$  fijo al sistema móvil:  $S'$  y  $S''$ . El primero,  $S'$ , tiene ejes que se mueven solidariamente con el sistema extendido y mientras que  $S''$  mantiene sus ejes paralelos a los de  $S$ .

Tomando la  $i$ -ésima componente de la expresión anterior y usando que  $\vec{r}'_a \cdot \vec{\Omega} = \sum_{j=1}^3 r_{aj} \Omega_j$  se tiene

$$(*)_i = \sum_{a=1}^N \sum_{j=1}^3 m_a (r_a'^2 \delta_{ij} - r'_{ai} r'_{aj}) \Omega_j \quad (8.2.5)$$

$$= \sum_j \mathbf{I}_{ij}^{\mathcal{O}' } \Omega_j \quad (8.2.6)$$

donde la *matriz de inercia*  $\mathbf{I}_{ij}^{\mathcal{O}'}$  del sistema con respecto al origen  $\mathcal{O}'$  se define por

$$\mathbf{I}_{ij}^{\mathcal{O}' } = \sum_{a=1}^N m_a (r_a'^2 \delta_{ij} - r'_{ai} r'_{aj}) \quad (8.2.7)$$

Con esto el momento angular del sistema con respecto al origen  $\mathcal{O}$  del sistema intercal  $S$  es

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}') + M\vec{R}' \times \dot{\vec{R}} + \mathbf{I}^{\mathcal{O}' } \vec{\Omega} \quad (8.2.8)$$

### 8.2.2. El caso $\mathcal{O}' = G$

En el caso  $\mathcal{O}' = G$  el vector  $\vec{R}' \equiv 0$  mientras que  $\vec{r}'_a = \vec{\rho}_a$  y el vector  $\vec{R} \equiv \vec{R}_G$ . El momento angular se escribe

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}} = M\vec{R}_G \times \dot{\vec{V}}_G + \vec{\ell}_G \quad (8.2.9)$$

donde

$$\vec{\ell}_G = \mathbf{I}^G \vec{\Omega} \quad (8.2.10)$$

### 8.2.3. Sistema rígido con punto $P$ fijo en $S$

En este caso es conveniente escoger  $P = \mathcal{O} = \mathcal{O}'$  por lo que  $\vec{R} = 0$  y (8.2.8) se simplifica a

$$\vec{\ell}_P = \mathbf{I}^P \vec{\Omega} \quad (8.2.11)$$

La expresión (8.2.11) permite ver que en general el momento angular no es paralelo a la velocidad angular. En el caso particular en que la velocidad angular es proporcional a uno de los autovectores de  $\mathbf{I}^P$  los vectores  $\vec{\ell}_P$  y  $\vec{\Omega}$  sí son paralelos.

### 8.3. Energía cinética y la matriz de inercia

#### 8.3.1. General

Utilizando la descomposición (8.2.1)  $\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}_a'$  la energía cinética del sistema se puede escribir

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \left( \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \left( \dot{R}^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \right) + \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \right)^2 \right) \end{aligned}$$

En el segundo término se puede aislar  $\sum_a m_a \vec{r}_a' = M\vec{R}'$  donde  $\vec{R}'$  es la posición del centro de masa en el sistema  $S'$ . El último término puede ser reescrito:

$$\begin{aligned} \text{último} &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a' \cdot \vec{\Omega} \times \vec{r}_a' \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{\Omega} \cdot \vec{r}_a' \times \vec{v}_a' \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\ell}_{\mathcal{O}' } \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}^{\mathcal{O}' } \vec{\Omega} \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Se usó que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}' } = \mathbf{I}^{\mathcal{O}' } \vec{\Omega} \tag{8.3.2}$$

Con lo anterior

$$K = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot \vec{\Omega} \times \vec{R}' + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}^{\mathcal{O}' } \vec{\Omega} \tag{8.3.3}$$

Dos casos especiales:

a) Si  $\mathcal{O}' = G$  se tiene que  $\vec{R}' = 0$  y  $\vec{R} = \vec{R}_G$  por lo que

$$K = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}^G \vec{\Omega} \tag{8.3.4}$$

- b) Si el sistema tiene punto fijo  $P$  se escoge  $P = \mathcal{O} = \mathcal{O}'$  con lo cual  $\vec{R} = 0$  y

$$K = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}^P \vec{\Omega} \quad (8.3.5)$$

Puesto que esta propiedad es válida para cualquier velocidad angular  $\vec{\Omega}$  que se le dé al sistema, y puesto que  $K \geq 0$  entonces la matriz  $\mathbf{I}^P$  es positiva semidefinida. Como además es simétrica esto implica que  $\mathbf{I}^P$  es diagonalizable y sus autovalores son no negativos. Ellos se denominan los *momentos de inercia principales* del sistema rígido.

La orientación (del sistema de referencia solidario  $S'$ ) de los ejes en que se logra esta forma para  $\mathbf{I}^P$  se llaman los *ejes principales* y son autovectores de  $\mathbf{I}^P$ .

## 8.4. La estructura de una matriz de inercia

### 8.4.1. Su forma matricial

Las matrices de inercia en el caso de sistemas de muchos puntos masivos tiene la forma típica

$$I_{ij} = \sum_{a=1}^N m_a (r_a^2 \delta_{ij} - r_{ai} r_{aj}) \quad (8.4.1)$$

Por ejemplo

$$I_{11} = \sum_a m_a (r_a^2 - x_a^2) = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2)$$

y los tres elementos diagonales son:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2) \\ I_{22} &= \sum_a m_a (z_a^2 + x_a^2) \\ I_{33} &= \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

La matriz de inercia en forma matricial es

$$\mathbf{I} = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -x_a y_a & z_a^2 + x_a^2 & -y_a z_a \\ -x_a z_a & -y_a z_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix} \quad (8.4.3)$$

que es real y simétrica. Se verá también que sus autovalores son no negativos. Los tres autovalores de  $\mathbf{I}$  se denominan los *momentos de inercia*

*principales* del sistema mientras que los autovectores definen los *ejes principales*.

Si se trata de una distribución continua de masa la matriz de inercia se define

$$I^G = \int \begin{pmatrix} \rho_y^2 + \rho_z^2 & -\rho_x\rho_y & -\rho_x\rho_z \\ -\rho_x\rho_y & \rho_z^2 + \rho_x^2 & -\rho_y\rho_z \\ -\rho_x\rho_z & -\rho_y\rho_z & \rho_x^2 + \rho_y^2 \end{pmatrix} dm \quad (8.4.4)$$

Genéricamente se denomina  $dm$  al producto de la densidad de masa por el elemento de línea, superficie o volumen según lo que corresponda,

$$dm = \begin{cases} \lambda ds \\ \sigma d\mathcal{S} \\ \rho dV \end{cases} \quad (8.4.5)$$

El centro de masa en estos casos continuos es una integral de  $\frac{1}{M}\vec{r}$  multiplicado por la densidad que corresponda y se integra sobre todo el cuerpo,

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad (8.4.6)$$

En los casos de distribución continua de masa los momentos de inercia se definen como

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int \lambda(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) ds && \text{caso lineal} \\ I_{ij} &= \int \sigma(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) d\mathcal{S} && \text{caso laminar} \\ I_{ij} &= \int \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV && \text{caso volumétrico} \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

o más económicamente

$$I_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm \quad (8.4.8)$$

**La matriz de inercia es aditiva:** La definición de matriz de inercia, (8.4.1), contiene  $N$  sumandos, uno por cada partícula del sistema. En algunos casos puede ser útil separar a un sistema rígido en dos sistemas con  $N_1$  y  $N_2$  partículas cada uno,  $N = N_1 + N_2$  y en tal caso la matriz de inercia se puede separar en dos, una con índices  $a$  que toma  $N_1$  valores y la otra que toma el resto de los valores. La matriz de inercia del sistema completo no es más que la suma de las dos matrices de inercia parciales,

$$I_{ij}^P = {}^{(1)}I_{ij}^P + {}^{(2)}I_{ij}^P \quad (8.4.9)$$

### 8.4.2. Teorema de Steiner

Consideremos la matriz de inercia  $\mathbf{I}^Q$  con respecto a ciertos ejes con origen en un punto  $Q$  y veamos su relación con la matriz de inercia con respecto al centro de masa  $G$  y ejes paralelos a los anteriores. La relación entre los vectores posición es

$$\vec{r}_a = \vec{R}_G + \vec{\rho}_a$$

y

$$\begin{aligned} \sum m_a r_a^2 &= \sum_a m_a (\rho_a^2 + R_G^2 + 2\vec{\rho}_a \cdot \vec{R}_G) \\ &= \sum_a m_a \rho_a^2 + MR_G^2 \end{aligned}$$

mientras que

$$\sum_a m_a x_{ai} x_{aj} = \sum_a m_a (\rho_{ai} \rho_{aj} + R_{Gi} \rho_{aj} + \rho_{ai} R_{Gj} + R_{Gi} R_{Gj}) = \sum_a m_a \rho_{ai} \rho_{aj} + MR_{Gi} R_{Gj}$$

lo que determina, al reemplazar en la definición de las matrices de inercia (todas de la forma (8.4.1)) que

$$I_{ij}^Q = I_{ij}^G + M (R_G^2 \delta_{ij} - R_{Gi} R_{Gj}) \quad \text{teorema de Steiner} \quad (8.4.10)$$

donde

$$I_{ij}^G = \sum_a m_a (\rho_a^2 \delta_{ij} - \rho_{ai} \rho_{aj}) \quad (8.4.11)$$

y  $\vec{R}_G$  es el vector  $\vec{QG}$ .

Si se usa la notación  $\vec{R}_G = (X, Y, Z)$  el teorema de Steiner toma la forma

$$\mathbf{I}^Q = \sum_a m_a \begin{pmatrix} \rho_{ay}^2 + \rho_{az}^2 & -\rho_{ax} \rho_{ay} & -\rho_{ax} \rho_{az} \\ -\rho_{ax} \rho_{ay} & \rho_{az}^2 + \rho_{ax}^2 & -\rho_{ay} \rho_{az} \\ -\rho_{ax} \rho_{az} & -\rho_{ay} \rho_{az} & \rho_{ax}^2 + \rho_{ay}^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & Z^2 + X^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{pmatrix} \quad (8.4.12)$$

EJERCICIO: Escriba la relación (8.4.10) para dos puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  y reste ambas relaciones. Vea que obtiene una relación entre  $\mathbf{I}^{Q_1}$  e  $\mathbf{I}^{Q_2}$ .

## 8.5. Ejemplos de matriz de inercia

### 8.5.1. Ejemplo 1: triángulo

Tres masas puntuales  $m$  forman un triángulo equilátero de lado  $a$  en el plano  $Y'Z'$  centrado en  $G$ , y con vértices en los puntos  $\vec{\rho}_1 = (0, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}})$ ,  $\vec{\rho}_2 = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}})$  y  $(\vec{\rho}_3 = 0, 0, -\frac{a}{\sqrt{3}})$  tal como lo indica la figura adjunta. Se comprueba que  $\sum_a \rho_{ax}^2 = 0$  y  $\sum_a \rho_{ay}^2 = \sum_a \rho_{az}^2 = \frac{a^2}{2}$ . También se comprueba que  $\sum_a \rho_{ay}\rho_{az} = 0$ .

Con todo esto y las expresiones generales dadas más arriba, la matriz de inercia resulta ser

$$\mathbf{I}^G = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

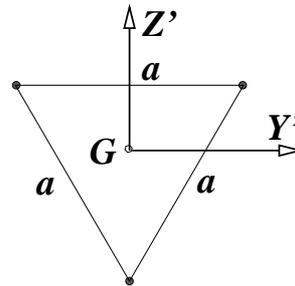


Figura 8.3: Matriz de inercia de un triángulo equilátero de lado  $a$  con respecto a su centro  $G$ .

Si se trata de una lámina triangular de densidad uniforme  $\sigma = 4M/(\sqrt{3}a^2)$ , se debe hacer la integral (8.4.4) con  $\rho_x = 0$  (ya que la lámina está en el plano  $Y'Z'$ ), (para simplificar la notación se usará  $x \equiv \rho_x$ , etc.)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^G &= \frac{4M}{\sqrt{3}a^2} \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/(2\sqrt{3})} \left( \int_{-a/3-z/\sqrt{3}}^{a/3+z/\sqrt{3}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & -yz \\ 0 & -yz & y^2 \end{pmatrix} dy \right) dz \\ &= \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.5.1}$$

### 8.5.2. Ejemplo 2: cilindro

A continuación se calcula la matriz de inercia de un cilindro de masa  $M$  con respecto a su centro de masa. El cilindro tiene radio  $R$ , altura  $h$ , los ejes cartesianos de  $S'$  se escogen de modo que el eje de simetría es el eje  $Z'$ . La densidad  $\rho_0$  del cilindro se toma uniforme,

$$\rho_0 = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

El elemento de volumen y el rango de las variables son  $dV = \rho d\rho d\phi dz$ ,  $0 \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$  por lo que

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 h} \rho d\rho d\phi dz$$

El vector posición de un punto interior cualquiera del cilindro es  $\vec{r} = x\hat{i}' + y\hat{j}' + z\hat{k}'$  con  $x = \rho \cos \phi$  y  $y = \rho \sin \phi$ . De aquí que

$$\mathbf{I}^G = \frac{M}{\pi R^2 h} \int \begin{pmatrix} \rho^2 \sin^2 \phi + z^2 & -\rho^2 \sin \phi \cos \phi & -z\rho \cos \phi \\ -\rho^2 \sin \phi \cos \phi & \rho^2 \cos^2 \phi + z^2 & -z\rho \sin \phi \\ -z\rho \cos \phi & -z\rho \sin \phi & \rho^2 \end{pmatrix} \rho d\rho d\phi dz$$

Usando que

$$\begin{aligned} \int z^2 dz &= \frac{h^3}{12} & \int dz &= h \\ \int \rho^3 d\rho &= \frac{R^4}{4} & \int d\rho &= R \\ \int \sin^2 \phi d\phi &= \pi & \int d\phi &= 2\pi \end{aligned}$$

se obtiene

$$\mathbf{I}_{\text{cilindro}}^G = M \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} \quad (8.5.2)$$

En el límite  $R \rightarrow 0$  se obtiene la matriz de una vara de largo  $h$  y en el límite  $h \rightarrow 0$  resulta la matriz de un disco de radio  $R$ . En ambos límites la expresión para la densidad ya no es aplicable.

El sistema es una vara si se toma  $R = 0$ ,

$$\mathbf{I}_{\text{vara}}^G = \frac{Mh^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5.3)$$

y es un disco si se toma  $h = 0$ ,

$$\mathbf{I}_{\text{disco}}^G = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.5.4)$$

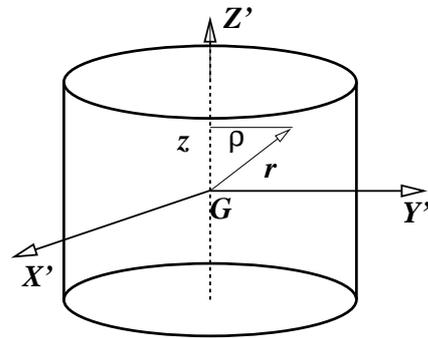


Figura 8.4: La matriz de inercia de un cilindro es fácil de calcular.

Usando el teorema de Steiner se puede calcular la matriz de inercia  $I^P$ , a partir de  $I^G$ , con respecto a un punto  $P$  con tan solo saber el vector  $\vec{R}_G$  que va desde  $P$  hasta  $G$ .

### 8.5.3. Dos ejemplos para hacer

En el primero caso se trata de una vara de largo  $h$ , ( $0 \leq z \leq h$ ) con densidad variable  $\text{dens} = 3Mz^2/h^3$ . La matriz de inercia de esta vara, con respecto a su extremo  $P$  resulta ser

$$I_{\text{vara inhom.}}^P = M \begin{pmatrix} \frac{3h^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3h^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5.5)$$

Demuestre que la matriz de inercia del cono de la figura 8.5 es

$$I^P = M \begin{pmatrix} \frac{3R^2}{20} + \frac{3h^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3R^2}{20} + \frac{3h^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3R^2}{10} \end{pmatrix} \quad (8.5.6)$$

Los dos primeros términos diagonales son iguales porque las direcciones  $X$  e  $Y$  pueden ser rotadas sin que nada cambie.

En el límite  $R \rightarrow 0$  se recupera la matriz de inercia de una vara dada en (8.5.5) porque, efectivamente, el cono tiene, a altura  $z$  una masa

$$dm = \frac{3Mz^2}{h^3} dz$$

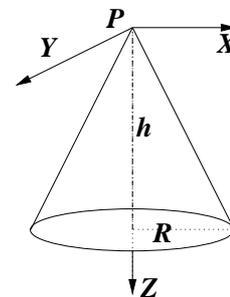


Figura 8.5: Un cono con vértice en  $P$ , altura  $h$  y radio basal  $R$ . El ángulo de apertura del cono es  $\theta = \arctan \frac{R}{h}$ .

## 8.6. Dinámica y ejemplos

### 8.6.1. Las ecuaciones básicas

Las leyes necesarias para resolver la dinámica de cuerpos rígidos son las del movimiento del centro de masa

y la dinámica de  $\vec{\ell}_O$  y de  $\vec{\ell}_G$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\ell}_O &= M\vec{R}_G \times \vec{V}_G + \vec{\ell}_G & \vec{\ell}_G &= \mathbf{I}^G \vec{\Omega} \\ \frac{d\vec{\ell}_O}{dt} &= \sum_a \vec{r}_a \times f_a^{\text{ext}} & \frac{d\vec{\ell}_G}{dt} &= \sum_a \vec{\rho}_a \times f_a^{\text{ext}} \\ K &= \frac{M}{2} V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}^G \vec{\Omega} & M \frac{d^2 \vec{R}_G}{dt^2} &= \vec{F}^{\text{tot}} \end{aligned} \right\} \quad (8.6.1)$$

En algunos casos conviene utilizar conservación de energía mecánica.

## 8.6.2. Péndulo cónico doble

### 8.6.2.1. Descripción en sistema $S'$

Consideremos un péndulo cónico doble como el de la figura. Se trata de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  que están en los extremos de una barra de largo  $b+c$ . La barra gira en torno al eje  $Z$  con velocidad angular  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$  manteniendo un ángulo  $\theta$  fijo con el eje  $Z$ . El sistema  $S'$  tiene  $Z' = Z$  y  $X'Y'$  son ejes horizontales tal como sistema inercial pero está rotando con la misma velocidad angular  $\Omega$  que el péndulo, de modo que los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  siempre están en el plano  $X'Z$  y son

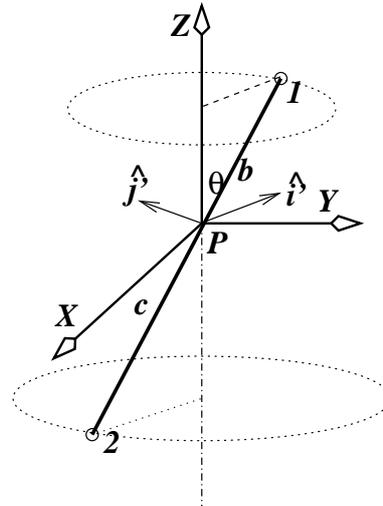


Figura 8.6: Un péndulo cónico doble. La proyección de la barra al plano horizontal que pasa por  $P$  define la dirección de vector acompañante  $\hat{i}'$

$$\vec{r}_1 = \hat{i}' b \sin \theta + \hat{k} b \cos \theta, \quad \vec{r}_2 = -\hat{i}' c \sin \theta - \hat{k} c \cos \theta$$

expresados con los vectores base asociados a  $S'$ . En esta base se obtiene, de (8.4.3), que

$$\mathbf{I}^P = \begin{bmatrix} (m_1 b^2 + m_2 c^2) \cos^2 \theta & 0 & -(m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 \\ -(m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta & 0 & (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

mientras que  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$ . Se determina entonces que

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_P = \mathbf{I}^P \vec{\Omega} &= \Omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \Omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta (\hat{k} \sin \theta - \hat{i}' \cos \theta) \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

Si se expresa  $\hat{i}'$  en la base del sistema inercial se obtiene que  $\vec{\ell}_P$  varía en el tiempo. En efecto  $\hat{i}' = \hat{i} \cos \Omega t + \hat{j} \sin \Omega t$ .

### 8.6.2.2. Descripción en el sistema $S''$

Ahora se describirá lo mismo pero usando, por un lado, la matriz de inercia descrita en otro sistema referencia  $S''$ .

Este sistema  $S''$  se define de modo que su eje  $Z''$  coincide con la dirección de la barra del péndulo y se escoje el eje  $X''$  en el plano  $ZZ''$ . La matriz de inercia de la barra con dos masas en sus extremos es particularmente sencilla en el sistema  $S''$  porque las coordenadas de las dos masas son  $\vec{r}_1'' = (0, 0, b)$  y  $\vec{r}_2'' = (0, 0, -c)$  lo que da la matriz de inercia

$$\mathbf{I}^P = \begin{pmatrix} m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de inercia que se definió con respecto a los ejes de  $S'$  es correcta pero conduce a una descripción más complicada. En la base de  $S''$  la velocidad angular es

$$\vec{\Omega} = \Omega (\hat{k}'' \cos \theta - \hat{i}'' \sin \theta) = \Omega \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

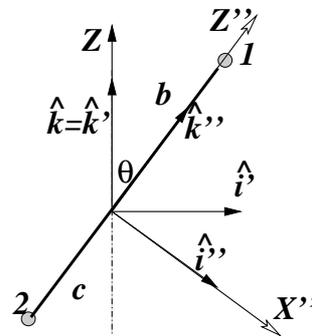


Figura 8.7: Vista lateral del péndulo doble.

con lo cual el momento angular es

$$\begin{aligned}
 \vec{\ell}_P &= \begin{pmatrix} m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega \sin \theta \\ 0 \\ \Omega \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\Omega \sin \theta (m_1 b^2 + m_2 c^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\Omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \hat{i}'' \quad (8.6.3)
 \end{aligned}$$

expresión que es equivalente a (8.6.2).

Si se desea que la única fuerza externa que ejerza torque desde  $P$  sea el peso, entonces  $\Omega$  debe tener un valor muy preciso. Para determinar  $\Omega$  se exige que  $\dot{\vec{\ell}}_P = \vec{\tau}_P$ .

De (8.6.3), y puesto que  $\left(\frac{d\hat{i}''}{dt}\right)_S = \vec{\Omega} \times \hat{i}'' = \Omega \hat{j}'' \cos \theta$  se tiene que

$$\dot{\vec{\ell}}_P = -\Omega^2 (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \hat{j}''$$

Por otro lado, puesto que  $\vec{g} = -g\hat{k} = g(\hat{i}'' \sin \theta - \hat{k}'' \cos \theta)$  por lo que

$$\vec{\tau}_P = (m_1 b - m_2 c) \sin \theta g \hat{j}''$$

Así, se obtiene que la condición para que el péndulo sea cónico es

$$\Omega^2 = \frac{(m_2 c - m_1 b)g}{(m_1 b^2 + m_2 c^2) \cos \theta}$$

Pareciera que el numerador pudiera ser negativo, pero se puede ver que tal situación es inestable. En efecto, para que este sistema sea estable el centro de masa  $G$ , que está en la recta que une a las dos masas, tiene que estar debajo de  $P$ .

### 8.6.3. Cilindro rodando pendiente abajo

Un cilindro de radio  $R$  rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Si bien este problema se puede resolver razonando en forma elemental, acá se usará los conceptos recién definidos.

En el problema hay tres fuerzas: el peso  $Mg(\hat{i}\sin\alpha - \hat{k}\cos\alpha)$ , la normal  $\vec{N} = N\hat{k}$  y el roce estático que impide que el cilindro deslice:  $\vec{F} = -F\hat{i}$ . La posición del centro de masa es  $\vec{R}_G = x\hat{i} + R\hat{k}$ , por lo que  $\ddot{\vec{R}}_G = \ddot{x}\hat{i}$ . La velocidad angular es  $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{j}$ , pero como el cilindro rueda sin deslizar se cumple que  $x = R\phi$ , lo que permite escribir

$$\vec{\Omega} = \frac{\dot{x}}{R}\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

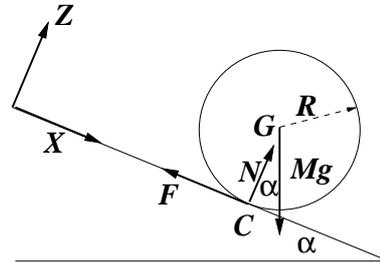


Figura 8.8: Un cilindro rueda pendiente abajo.

mientras que la matriz  $\mathbf{I}^G$  es esencialmente aquella dada en (8.5.2) pero tomando en cuenta que ahora el eje es en la dirección Y:

$$\mathbf{I}_{\text{cilindro}}^G = M \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \end{pmatrix}$$

por lo que  $\vec{\ell}_G = \mathbf{I}_{\text{cilindro}}^G \vec{\Omega} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{\dot{x}}{R}\hat{j} = \frac{1}{2}MR\dot{x}\hat{j}$ .

El torque  $\vec{\tau}_G$  se calcula sumando los productos del vector posición (desde G) del punto de aplicación de cada fuerza cruz la fuerza que corresponda. El peso y la normal no producen torque, de modo que solo se debe hacer el producto cruz entre el vector posición de C donde actúa la fuerza de roce cruz dicha fuerza:

$$\vec{\tau}_G = (-R\hat{k}) \times (-F\hat{i}) = RF\hat{j}$$

La ecuación dinámica que se obtiene es

$$I\dot{\phi} = RF \Rightarrow \frac{1}{2}MR\dot{x} = RF \Rightarrow F = \frac{M}{2}\ddot{x} \quad (8.6.4)$$

La componente  $\hat{i}$  de la ecuación  $M\ddot{\vec{R}}_G = \vec{F}^{\text{tot}}$

$$M\ddot{x} = -F + Mg\sin\alpha = -\frac{M}{2}\ddot{x} + Mg\sin\alpha \quad (8.6.5)$$

de donde se concluye que

$$\ddot{x} = \frac{2g}{3}\sin\alpha \quad (8.6.6)$$

Otra forma de analizar el mismo problema: La energía cinética del cilindro es (ver (8.3.4))  $K = M\dot{x}^2/2 + I\dot{\phi}^2/2$ , pero como  $\dot{\phi} = \dot{x}/R$ , se tiene que  $K = (MR^2 + I)\dot{x}^2/(2R^2)$ . Por otro lado la energía potencial es  $U = -mgx \sin \alpha$ . Puesto que  $K + U$  es constante, su derivada es nula. Tal ecuación permite despejar  $\ddot{x}$  reobteniéndose (8.6.6).

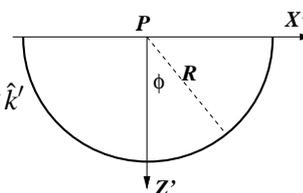
#### 8.6.4. Una semicircunferencia con densidad lineal uniforme

La densidad de masa lineal es uniforme,  $\lambda = \frac{M}{R\pi}$  donde  $R$  es el radio de la semicircunferencia. Se toma como  $P$  el centro de curvatura por lo que el vector que señala los puntos de la curva es  $\vec{r} = R(\hat{k}' \cos \phi + \hat{i}' \sin \phi)$  donde  $\phi = -\pi/2 \dots \phi/2$ .

El elemento de arco es  $Rd\phi$ , por lo que  $dm =$

$$\lambda ds = \frac{M}{R\pi} R d\phi = \frac{M}{\pi} d\phi$$

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \frac{M}{\pi} \int R(\hat{k}' \cos \phi + \hat{i}' \sin \phi) d\phi = \frac{2R}{\pi} \hat{k}' \approx 0,64R \hat{k}'$$



Puesto que  $\vec{r} = R(\hat{k}' \cos \phi + \hat{i}' \sin \phi)$  entonces  $x = R \sin \phi$ ,  $y = 0$  y  $z = R \cos \phi$ . La matriz  $[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j]$  es

Figura 8.9: Semicircunferencia de radio  $R$  y masa  $M$ .

$$\begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi & 0 & -R^2 \sin \phi \cos \phi \\ 0 & R^2 & 0 \\ -R^2 \sin \phi \cos \phi & 0 & R^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\mathbf{I}^P = \int \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi & 0 & -R^2 \sin \phi \cos \phi \\ 0 & R^2 & 0 \\ -R^2 \sin \phi \cos \phi & 0 & R^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix} \frac{M}{\pi} d\phi = \frac{MR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si este sistema es un péndulo que oscila en torno al eje  $Y' = Y$  entonces  $\vec{\Omega} = \dot{\alpha} \hat{j}'$  donde  $\alpha$  es el ángulo que forma  $Z'$  con el eje vertical  $Z$  (que en este ejemplo apunta hacia abajo). El momento angular en tal caso es

$$\vec{\ell}_P = \mathbf{I}^P \Omega = MR^2 \dot{\alpha} \hat{j}'$$

Por otro lado el torque es

$$\tau = M \vec{R}_G \times \vec{g} = M \frac{2R}{\pi} \hat{k}' \times g(\hat{k}' \cos \alpha - \hat{i}') = -\frac{2MgR}{\pi} \sin \alpha \hat{j}'$$

lo que conduce a

$$\ddot{\alpha} = \frac{2g}{\pi R} \sin \alpha$$

Con todo lo anterior también puede resolverse en forma semejante el caso en que el arco oscila en torno al eje  $X' = X$ , lo que lleva a un resultado parecido pero no idéntico.

### 8.6.5. Sistema oscilante sin punto fijo

Se plantea estudiar el movimiento oscilatorio de un arco como el de la figura 8.10, de densidad lineal de masa uniforme, masa total  $M$  y radio  $R_0$ . Ya se ha visto que la matriz de inercia del arco es

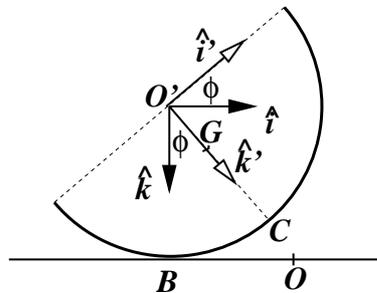


Figura 8.10: Un alambre semicircular se mantiene en un plano vertical oscilando de tal modo que su punto central  $C$  se levanta (como en esta figura), desciende, haciendo contacto en  $\mathcal{O}$  y luego levantándose por el otro lado. En la figura el arco tiene contacto con la horizontal en el punto  $B$  y está inclinado en un ángulo  $\phi$  con respecto a su posición de equilibrio estático. En el equilibrio estático  $\phi = 0$ , y  $C$  coincide tanto con  $\mathcal{O}$  como con  $B$ .

$$\mathbf{I}^{\mathcal{O}'} = \frac{MR_0^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuando se escribe con respecto a las direcciones  $X'Y'Z'$ . En su oscilación el arco rota con velocidad angular

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{j}, \quad \hat{j} = \hat{j}'$$

El vector posición de  $\mathcal{O}'$  desde el sistema inercial con ejes  $(\hat{i}, \hat{k})$  y origen en  $\mathcal{O}$  es

$$\vec{R} = \vec{\mathcal{O}}\mathcal{O}' = -R_0(\phi \hat{i} + \hat{k})$$

Por otro lado la posición del centro de masa desde  $\mathcal{O}'$  es

$$\vec{R}' = \mathcal{O}'\vec{G} = \frac{2R_0}{\pi}\hat{k}' = \frac{2R_0}{\pi}(\hat{k}\cos\phi + \hat{i}\sin\phi)$$

En (8.3.3) se vio cómo escribir la energía cinética en un caso como el actual, en términos de  $\vec{R}$ ,  $\dot{\vec{R}}$ ,  $\vec{R}'$ ,  $\vec{\Omega}$  y de  $\mathbf{I}^{\mathcal{O}'}$ . A los tres sumandos en (8.3.3) los denominaremos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  respectivamente. Es fácil determinarlos

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{MR_0^2}{2}\dot{\phi}^2 \\ K_2 &= -\frac{2MR_0^2}{\pi}\dot{\phi}^2 \\ K_3 &= \frac{MR_0^2}{2}\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

Por otro lado, la energía potencial gravitacional depende de la masa, la posición de  $G$  y de  $g$ ,

$$U = -Mg(\vec{R} + \vec{R}') \cdot \hat{k} = \frac{MgR_0}{\pi}(\pi - 2\cos\phi)$$

Se debe exigir que la energía total:  $E = K + U$  es constante, es decir  $dE/dt = 0$ , lo que conduce a

$$(\pi - 2\cos\phi)\ddot{\phi} + \frac{g\sin\phi}{R_0} + \dot{\phi}^2\sin\phi = 0$$

Para oscilaciones pequeñas tanto  $\phi$  como  $\dot{\phi}$  son chicos y la ecuación puede aproximarse a

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g}{(\pi - 2)R_0}\phi$$

que implica pequeñas oscilaciones con frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{(\pi - 2)R_0}}$$

### 8.6.6. Disco que rota en círculo sobre un plano

Se tiene un eje perpendicular a un plano horizontal. De este eje nace, a altura  $R$  sobre el plano, un brazo horizontal de largo  $L$ —en la dirección del eje  $Z'$ —y en cuyo extremo hay un disco de radio  $R$ . El disco tiene densidad uniforme, masa total  $M$  y gira en torno a su eje  $Z'$  con una velocidad angular dada  $\vec{\omega}_1$ . Puesto que no desliza sobre el plano, además gira en torno al eje

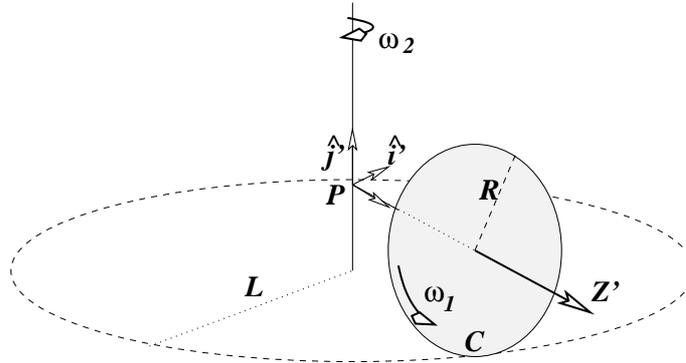


Figura 8.11: Una rueda gira sobre un plano sin resbalar. Su eje mantiene un punto fijo sobre el eje Z.

vertical con velocidad angular  $\vec{\omega}_2$ , totalmente determinada por la anterior. Se desea determinar el momento angular del disco.

Se escoge coordenadas polares, con lo cual

$$\vec{\omega}_1 = \hat{k}' \omega_1, \quad \vec{\omega}_2 = -\hat{j}' \omega_2$$

lo que determina que la velocidad angular total del disco sea

$$\vec{\Omega} = \hat{k}' \omega_1 - \hat{j}' \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad (8.6.8)$$

El punto material C del disco que en el instante actual está apoyado sobre el plano tiene velocidad nula en ese instante, pero, porque es parte de un sistema rígido con punto fijo, tiene que valer  $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C$ , esto es,

$$0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C = (\hat{k}' \omega_1 - \hat{j}' \omega_2) \times (L\hat{k}' - R\hat{j}') \implies \omega_2 = \frac{R}{L} \omega_1$$

Para calcular el momento angular se va a usar la matriz de inercia del disco,  $\mathbf{I}_{\text{disco}}^G$  a la que hay que agregar la matriz  $[R^2 \delta_{ij} - R_i R_j]$ . donde  $\vec{R} = (0, 0, L)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\text{disco}}^P &= \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + ML^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4L^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

y se la va a multiplicar por  $\vec{\Omega}$  y como matriz de inercia se va a usar directamente (8.6.9). Entonces  $\vec{\ell} = \mathbf{I}_{\text{disco}} \vec{\Omega}$  se escribe

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4L^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{R}{L}\omega_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -(4L^2 + R^2)\frac{R}{L}\omega_1 \\ 2R^2\omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{MR\omega_1}{4} \left( \hat{k}' 2R - \hat{j}' \frac{4L^2 + R^2}{L} \right) \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

### 8.6.7. Trompo en movimiento cónico

Se considera un trompo que consiste en un brazo de largo  $L$  que nace de un punto  $P$  en cuyo extremo hay un disco de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$ . Esto es  $\vec{R}_G = -L\hat{k}'$  usando la base asociada al sistema  $\{P, X', Y', Z'\}$  de la figura 8.12.

El brazo mantendrá un ángulo  $\theta = \text{constante}$  con la vertical tal como indica la figura. En cada instante el disco está girando con velocidad angular  $\vec{\omega}_1$  respecto a un sistema fijo al brazo, pero el brazo mismo está girando con una velocidad angular  $\vec{\omega}_2$  en torno al eje vertical. Estas velocidades se expresan en la forma

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{k}', \quad \vec{\omega}_2 = \omega_2 (\hat{k}' \cos \theta + \hat{j}' \sin \theta) \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} = \hat{k}' (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) + \hat{j}' \omega_2 \sin \theta$$

Este movimiento es posible tan solo si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen una condición que se deduce más adelante. En general el ángulo  $\theta$  no es constante y el movimiento del trompo es bastante complicado.

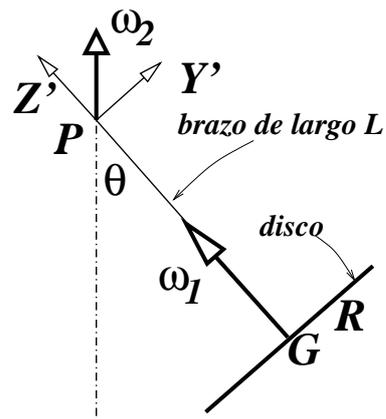


Figura 8.12: Un disco gira en torno a un eje de largo  $L$ . El otro extremo del eje está fijo al punto  $P$ . El sistema  $S'$  tiene eje  $Z'$  que coincide con el brazo de largo  $L$  y el eje  $Y'$  está en el plano de  $Z'$  y la vertical.

La matriz de inercia  $\mathbf{I}^P = [R^2\delta_{ij} - R_iR_j] + \mathbf{I}^G$  y, tal como en el ejemplo anterior, resulta se

$$\mathbf{I}^P = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4L^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}$$

por lo que el momento angular  $\vec{\ell}_P = \mathbf{I}^P \vec{\Omega}$  es

$$\vec{\ell}_P = \frac{M}{4} [(4L^2 + R^2) \omega_2 \sin \theta \hat{j}' + 2R^2 (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \hat{k}']$$

En esta expresión todas las cantidades son constantes en el sistema de referencia inercial excepto por dos vectores unitarios asociados a  $S'$ , de modo que  $\dot{\vec{\ell}}_P$  se calcula sencillamente usando producto cruz con  $\vec{\omega}_2$ :

$$\dot{\vec{\ell}}_P = \vec{\omega}_2 \times \vec{\ell}_P = \frac{M}{4} [-(4L^2 + R^2) \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta + 2R^2 (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \omega_2 \sin \theta] \hat{i}'$$

que debe igualarse al torque que produce el peso

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= M\vec{R}_G \times \vec{g} \\ &= M(-L\hat{k}') \times (-g) (\hat{k}' \cos \theta + \hat{j}' \sin \theta) \\ &= -MgL \sin \theta \hat{i}' \end{aligned} \tag{8.6.11}$$

por lo que finalmente puede escribirse que

$$\frac{M}{4} [-(4L^2 + R^2) \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta + 2R^2 (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \omega_2 \sin \theta] = -MgL \sin \theta \tag{8.6.12}$$

que es la relación que deben satisfacer  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para que el trompo tenga un movimiento cónico. Nótese que si se cambia el signo de  $\omega_1$  y de  $\omega_2$  la ecuación no cambia. Esta ecuación implica que el caso  $\omega_2 = 0$  es posible tan solo si  $\theta = 0$  lo que es intuitivo.

Suponiendo que  $\theta \neq 0$  la ecuación anterior se puede reescribir en la forma

$$\left(\frac{R^2}{4} - L^2\right) \omega_2^2 \cos \theta + \frac{1}{2}R^2 \omega_1 \omega_2 + gL = 0 \tag{8.6.13}$$

A continuación un par de casos especiales.

**El caso  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :**

$$\omega_1 \omega_2 = -\frac{2Lg}{R^2}$$

**El caso**  $L = 0$  :

$$\cos \theta = -\frac{2\omega_1}{\omega_2}$$

Nótese que para pasar de (8.6.12) a (8.6.13) se eliminó un factor global  $\sin \theta$ , lo que supone que  $\theta \neq 0$ . Sin embargo si en (8.6.12) se impone que  $\omega_2 = 0$  se desprende que necesariamente  $\theta = 0$ .

## 8.7. Noción del momento de inercia $I_{P,\hat{n}}$ y aplicaciones

### 8.7.1. El concepto

Si se define  $\hat{n}$  como el vector unitario que en cada instante apunta en la dirección de  $\vec{\Omega}$ , es decir,

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{n}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\Omega^2 \hat{n} \cdot \mathbf{I}^P \hat{n} = \frac{1}{2} I_{P,\hat{n}} \Omega^2 \quad (8.7.1)$$

donde el escalar  $I_{P,\hat{n}}$  es

$$I_{P,\hat{n}} \equiv \hat{n} \cdot \mathbf{I}^P \hat{n} \quad (8.7.2)$$

y es el *momento de inercia relativo al eje que pasa por P y tiene dirección  $\hat{n}$ ,  $(P,\hat{n})$* . Por componentes es

$$I_{P,\hat{n}} = \sum_a m_a (r_a^2 - (\vec{r}_a \cdot \hat{n})^2) \quad (8.7.3)$$

Es útil notar que

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\vec{r} \times \hat{n}) &= \vec{r} \cdot (\hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n})) \\ &= \vec{r} \cdot (\vec{r} - \hat{n} \cdot \vec{r} \hat{n}) \\ &= r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{n})^2 \end{aligned} \quad (8.7.4)$$

lo que permite ver que otra forma de escribir la matriz de inercia es

$$I_{P,\hat{n}} = \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}_a \times \hat{n}) \quad (8.7.5)$$

### 8.7.2. Nuevamente el teorema de Steiner

Si  $G$  es el centro de masa, el que suponemos que no está en el eje  $(P, \hat{n})$ , se puede relacionar los momentos de inercia  $I_{P, \hat{n}}$  y  $I_{G, \hat{n}}$  donde el segundo se define relativo a un eje  $(G, \hat{n})$  con la misma dirección  $\hat{n}$ . Si se denota por  $\vec{r}_a$  la posición de  $m_a$  desde  $P$  y  $\vec{\rho}_a$  la posición desde  $G$ , y el vector de  $P$  a  $G$  se le designa  $\vec{R}$  entonces

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{\rho}_a$$

A partir de (8.7.5) se obtiene que

$$\begin{aligned} I_{P, \hat{n}} &= \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \hat{n})^2 \\ &= \sum_a m_a (\vec{\rho}_a \times \hat{n})^2 + \sum_a m_a (\vec{R} \times \hat{n})^2 + 2 \sum_a m_a (\vec{R} \times \hat{n}) \cdot (\vec{\rho}_a \times \hat{n}) \end{aligned}$$

La última de las sumatorias se anula debido a (2.3.24) lo que finalmente conduce a

$$I_{P, \hat{n}} = I_{G, \hat{n}} + M (\vec{R} \times \hat{n})^2 \quad (8.7.6)$$

Si  $G$  estuviese sobre el eje  $(P, \hat{n})$ , entonces  $\vec{R} \times \hat{n} = 0$  y ambos momentos de inercia resultarían iguales.

**EJERCICIO:** Escriba la relación (8.7.6) para dos puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  (ejes paralelos) y reste ambas relaciones. Vea que obtiene una relación entre  $I_{Q_1, \hat{n}}$  e  $I_{Q_2, \hat{n}}$ .

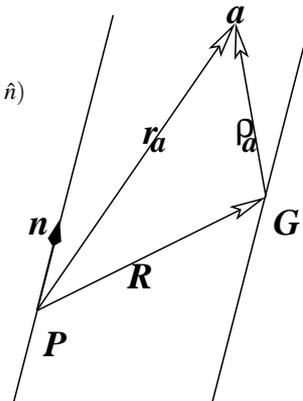


Figura 8.13: Se puede establecer una sencilla relación entre el momento de inercia con respecto al punto fijo  $P$  y el momento de inercia con respecto al centro de gravedad  $G$ .

### 8.7.3. Ejemplos

De la expresión (8.5.2) para la matriz de inercia del cilindro con respecto a su centro de masa,  $I_{\text{cilindro}}^G$  se obtiene directamente que

$$I_{G, \hat{k}} = \frac{1}{2} MR^2 \quad (8.7.7)$$

$$I_{G, \hat{i}} = I_{G, \hat{j}} = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \quad (8.7.8)$$

Para calcular la matriz con respecto a un eje paralelo al eje  $X'$  que para por el punto  $P$  se debe calcular  $\vec{R} \times \hat{n}$  con  $\hat{n} = \hat{i}'$  y  $\vec{R} = -L\hat{k}'$ , con lo cual

$\vec{R} \times \hat{n} = -L\hat{i}'$  por lo cual

$$I_{P,\hat{i}'} = I_{G,\hat{i}'} + ML^2 = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + L^2 \right)$$

En el límite de un disco resulta

$$I_{P,\hat{i}'}^{\text{disco}} = I_{G,\hat{i}'} + ML^2 = M \left( \frac{R^2}{4} + L^2 \right)$$

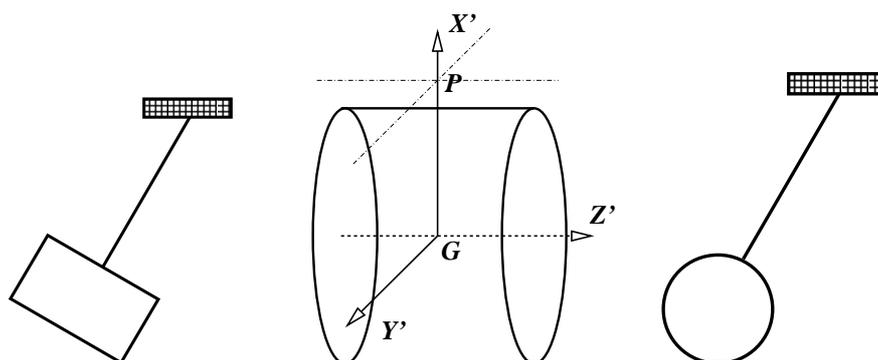


Figura 8.15: Se considera también un cilindro cuyo eje es horizontal y un punto  $P$  que está a distancia  $L$  sobre  $G$ . Se estudia el caso en que el eje de rotación es paralelo al eje  $Y'$  (perpendicular al eje del cilindro y caricaturizado en el dibujo izquierdo) y el caso en que el eje de rotación sea paralelo al eje del cilindro y caricaturizado en la figura de la derecha. En ambos casos el vector que va de  $P$  a  $G$  es  $\vec{R} = -L\hat{i}'$ .

- En el caso en que el eje que pasa por  $P$  es en la dirección  $\hat{j}$ ,  $\hat{n} = \hat{j}$  y  $\vec{R} \times \hat{h} = L\hat{k}$  por lo que

$$I_{P,\hat{j}'} = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + L^2 \right)$$

Un caso particular es un disco que gira en torno a un tangente horizontal tangente al disco ( $L = R$ ) en que resulta

$$I_{P,\hat{j}'}^{\text{disco}} = \frac{5}{4}MR^2 \quad \text{eje horizontal tangente al disco} \quad (8.7.9)$$

- En el caso  $\hat{n} = \hat{k}$  se obtiene

$$I_{P,\hat{k}'} = M \left( \frac{R^2}{2} + L^2 \right)$$

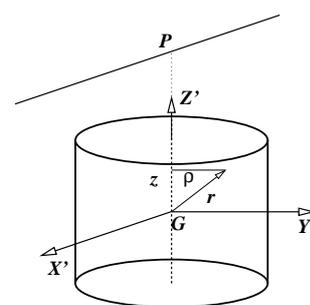


Figura 8.14: La matriz con respecto a un eje paralelo al eje  $X'$  que pasa por el punto  $P$

de donde puede verse el caso particular de un disco oscilando en su propio plano en torno a un punto en su perímetro ( $R = L$ ) que arroja

$$I_{P,\hat{k}'}^{\text{disco}} = \frac{3}{4}MR^2 \quad \text{punto fijo en el perímetro del disco}$$

\* \* \*

La dinámica en casos como los anteriores, en los cuales la dirección del eje  $\hat{n}$  de rotación está fija se obtiene una ecuación escalar a partir de  $\dot{\vec{\ell}}_P = \vec{\tau}_P$ .  
Primero

$$\begin{aligned} \ell_{P,\hat{n}} &\equiv \hat{n} \cdot \vec{\ell}_P \\ &= \hat{n} \cdot \mathbf{I}^P \hat{n} \Omega \\ &= I_{P,\hat{n}} \Omega \end{aligned}$$

por lo cual

$$\dot{\ell}_{P,\hat{n}} = \tau_{P,\hat{n}} \equiv \vec{\tau}_P \cdot \hat{n} \tag{8.7.10}$$

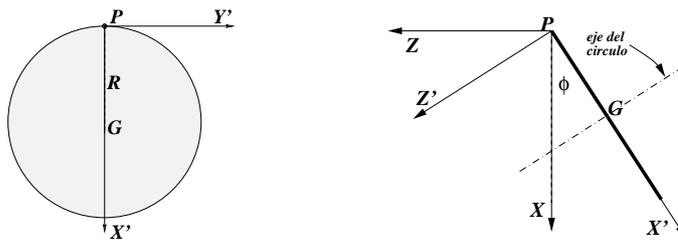


Figura 8.16: Lámina circular que se mueve como un péndulo en torno a un punto  $P$  en su perímetro. Los ejes  $X'$  e  $Y'$  de  $S'$  son solidarios al círculo y este gira en torno a  $Y'$ .

En el caso representado en la figura 8.16 ya se vio algo más arriba, en (8.7.9), que  $I_{P,\hat{j}}^{\text{disco}} = \frac{5}{4}MR^2$  de modo que el momento angular es

$$\ell_{P,\hat{j}} = \frac{5}{4}MR^2 \dot{\phi}$$

Por otro lado el torque del peso es

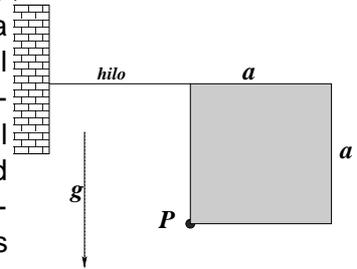
$$\vec{\tau}_{P,\hat{j}} = \hat{i}' \times (Mg)(\hat{i}' \cos \phi + \hat{k}' \sin \phi) \cdot \hat{j} = -MgR \sin \phi$$

por lo cual

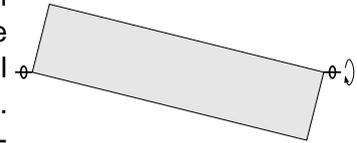
$$\ddot{\phi} = -\frac{4g}{5R} \sin \phi$$

## 8.8. Problemas

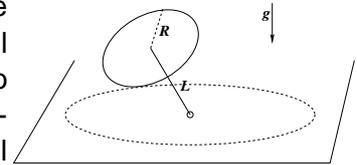
- 8.1 Una placa cuadrada de lado  $a$  y masa total  $M$  puede girar libremente en torno a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por su vértice  $P$  (ver figura). Inicialmente el cuadrado está sujeto por un hilo horizontal como indica la figura. (a) Obtenga la tensión del hilo. (b) Si el hilo se corta obtenga la velocidad angular máxima que puede alcanzar el sistema. (c) Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio.



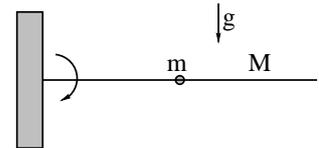
- 8.2 Una placa rectangular de masa  $M$ , lados  $a$  y  $b$  y espesor despreciable se hace girar con velocidad angular constante  $\Omega_0$  por un eje que pasa por la diagonal del rectángulo. El movimiento ocurre en ausencia de gravedad. Determine las fuerzas que ejercen los soportes en cada extremo del eje. Comente.



- 8.3 Sistema: un disco de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$  y un eje de masa despreciable que une un punto fijo de un plano horizontal con el centro del disco. El disco gira apoyado en el plano horizontal. (a) Determine el momento angular. (b) Determine el torque total que actúa sobre el disco.



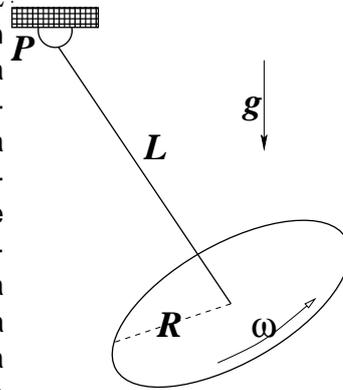
- 8.4 Una barra de largo  $L$  y masa  $M$  y densidad lineal uniforme, puede girar libremente sobre un eje horizontal colocado en uno de sus extremos. En el punto medio de la barra se encuentra un anillo de masa  $m$  que tiene un coeficiente de roce estático  $\mu$  con la barra.



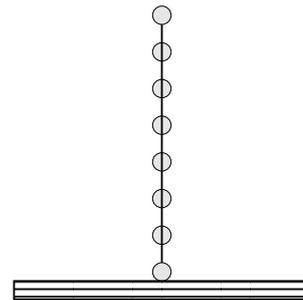
Si el sistema se libera desde el reposo con la barra en posición horizontal, se observa que el anillo comienza a deslizarse cuando la barra forma un ángulo  $\pi/4$  con la horizontal. Determine (a) el momento de inercia del sistema antes que el anillo comience a deslizarse, (b) la velocidad angular y aceleración angular de la barra en el instante en

que el anillo va a comenzar a deslizarse, (c) la fuerza que ejerce sobre la barra el punto de apoyo.

- 8.5 Se tiene una especie de péndulo que consta de una vara de masa despreciable y largo  $L$ , que solo puede girar en un plano vertical en torno a un punto fijo  $P$ . En su extremo libre la vara tiene un disco de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$  en forma perpendicular a la vara. El disco gira, con respecto a la vara (ella como eje), con velocidad angular uniforme  $\omega$ . (a) Determine el momento angular del sistema. (b) Si el sistema se suelta cuando la vara está vertical apuntando hacia arriba, una ecuación para la velocidad angular de la vara con respecto al ángulo que ella forma con la vertical.



- 8.6 Considere una barra rígida de masa despreciable que tiene  $N$  masas  $m$  a distancia  $a$  entre ellas. La barra está apoyada en el suelo e inicialmente en posición vertical. Estudie el movimiento de la barra cuando ella es levemente desviada de esa posición. Suponga que el roce estático con el suelo es suficiente para que el punto de apoyo nunca deslice. ¿Existe algún momento en que



el punto de apoyo se despegue del suelo? Estudie además el límite simultáneo  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 0$  tal que permanecen fijas las cantidades  $R = Na$  y  $M = Nm$ .

- 8.7 Resuelva ahora el caso anterior con una sola variante: el sistema tiene dos masas diferentes  $m_1$  y  $m_2$  en los extremos de la barra. Responda las mismas preguntas que antes excepto, naturalmente, la del límite.

