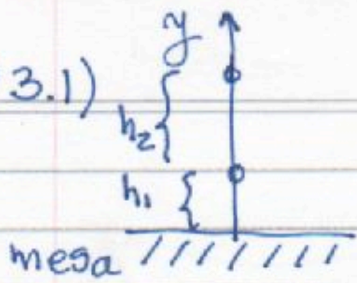
P3.1)



(1)

(2 puntos)

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Para la masa 1

$y_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$. Golpea la mesa

en τ_1 $\quad y_1(\tau_1) = 0 = h - \frac{1}{2} g \tau_1^2$

$$\tau_1 = \left(\frac{2 h_1}{g} \right)^{1/2}$$

Para la 2^a masa $\quad y_2(\tau_2) = 0 = h_1 + h_2 - \frac{1}{2} g \tau_2^2$

$$\tau_2 = \left(\frac{2(h_1 + h_2)}{g} \right)^{1/2}$$

El intervalo entre golpes es $\tau_2 - \tau_1$, y queremos que esto sea igual a $\tau_1 \Rightarrow$

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_1 \Rightarrow \tau_2 = 2\tau_1 \qquad (I)$$

$$\left(\frac{2(h_1 + h_2)}{g} \right)^{1/2} = 2 \left(\frac{2 h_1}{g} \right)^{1/2}$$

$$\frac{2(h_1 + h_2)}{g} = 4 \cdot \frac{2 h_1}{g} \Rightarrow h_2 = 4h_1 - h_1 = 3h_1$$

P3.2) Para la 3^a partícula (2 puntos)

$$\tau_3 = \left(\frac{2(h_1+h_2+h_3)}{g} \right)^{1/2}.$$

y para que la frecuencia de golpes sea constante

$$\tau_3 - \tau_2 = \tau_1 \Rightarrow \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 = 3\tau_1 \quad (\mathrm{II})$$

$$\left(2\frac{(h_1+h_2+h_3)}{g} \right)^{1/2} = 3\left(\frac{2h_1}{g}\right)^{1/2}$$

$$h_1+h_2+h_3 = 9h_1$$

$$h_3 = 9h_1 - h_1 - h_2 = 9h_1 - h_1 - 3h_1 = 5h_1$$

P3.3) Cuando el hilo se corta, todas las masas experimentan caída libre de manera simultánea. Entonces, la situación es totalmente análoga a lo visto en 3.1 y 3.2, el hilo que las ata no juega ningún rol (una vez que se corta!) (2 puntos)

Para calcular la distancia entre dos partículas cualquiera, notamos de 3.1 y 3.2 que h_{j+1} es justamente la distancia entre la partícula j y la $j+1$; con $j = 1, \ldots, N-1$

Ahora hay dos maneras de proceder; una + fácil que la otra, pero equivalentes.

P3.3 continuación)

Manera "fácil". De (I) y (II) vemos que

$$\tilde{\tau}_j = j \cdot \tau_1 \quad (\text{"inducción"}) \qquad (\text{III})$$

Esto es bastante intuitivo; el instante de cada golpe después del 1er golpe es un múltiplo del 1er golpe, de modo que la frecuencia (o intervalo) de golpes sea fija (por construcción del problema, según el enunciado).

Luego, vemos que (de (III))

$$\left.\begin{aligned} \tau_{j+1} &= (j+1)\tau_1 \\ \tau_j &= j\,\tau_1 \end{aligned}\right\}$$

Pero $\tau_{j+1} = \left(\dfrac{2(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g}\right)^{1/2} = (j+1)\tau_1 \quad /(\,)^2$

$$\tau_j = \left(\frac{2(h_1+h_2+\cdots+h_j)}{g}\right)^{1/2} = j\,\tau_1 \quad /(\,)^2$$

Elevando al $\square$ y restando:

$$\tau_{j+1}^2 - \tau_j^2 = \underbrace{\frac{2\sum_{i=1}^{j+1} h_i}{g} - \frac{2\sum_{i=1}^{j} h_i}{g}}_{\frac{2h_{j+1}}{g}} = \underbrace{\left[(j+1)^2 - j^2\right]}_{(2j+1)}\tau_1^2$$

$$\Rightarrow \quad h_{j+1} = \frac{g}{2}(2j+1)\tau_1^2 = \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}}(2j+1)\frac{\cancel{2}h_1}{\cancel{g}}$$

$$\boxed{h_{j+1} = (2j+1)\,h_1} \qquad (h_2 = 3h_1;\ h_3 = 5h_1,\ \text{etc}).$$

Manera "difícil"

$$\tau_{j+1} = \left(\frac{2\,(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g}\right)^{1/2}$$

$$\tau_{j+1} = (j+1)\,\tau_1 = (j+1)\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$$\frac{\cancel{2}\,(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{\cancel{g}} = (j+1)^2\,\frac{\cancel{2}h_1}{\cancel{g}}$$

$$h_{j+1} = (j+1)^2 h_1 - (h_1+h_2+\cdots+h_j)$$

$$= (j+1)^2 h_1 - \sum_{i=1}^{j} h_i \qquad (\mathrm{IV})$$

"inducción"

Como $h_2 = 3h_1$; $h_3 = 5h_1$, ..., $h_i = (2(i-1)+1)\,h_1 = (2i-1)\,h_1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{j} h_i = \Bigg[2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{j} i}_{\frac{j(j+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 1}_{j}\Bigg]\,h_1 = \big[\,j(j+1)-j\,\big]\,h_1 = j^2 h_1$$

$\Rightarrow$ en (IV)

$$h_{j+1} = (j+1)^2 h_1 - j^2 h_1 = (2j+1)\, h_1$$

$$\boxed{h_{j+1} = (2j+1)\, h_1}$$

Ambas maneras de resolver el problema se consideran válidas.