Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

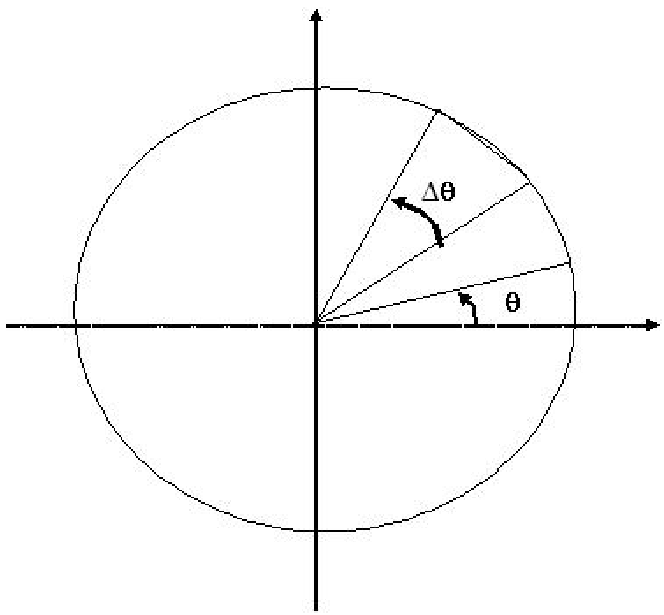
Profesor:
Nelson Zamorano H.
Profesores Auxiliares:
Javier Baeza
Pablo Barrios
Daniela Mancilla

Adendum GUIA 7

Robert Hooke es la persona de la Figura. Fue un hombre brillante pero no recibió los honores que se merecía porque la sombra de newton lo opacó.

Para resolver los Problemas #5 y #6 necesitan usar la expresión de la conservación de la energía. Aún no lo hemos visto. Para que puedan hacer dichos problema les envío una forma de llegar al resultado.

Se trata del ya gastado método de enderezar arcos de circunferencia por una cuerda. Descomponemos un arco arbitrario de ángulo total θ en N cuerdas de ángulo $\Delta\theta/2$. Tales que en el límite $N \to \infty$ y $\Delta\theta/2 \to 0$, con $N \cdot \Delta\theta/2 \longrightarrow \theta$.



El movimiento a lo largo de la cuerda se resuelve igual que el caso de una partícula deslizándose en un plano sin roce con aceleración constante.

en el tramo k-ésimo, se tiene $V^2_{\text{final}} - V^2_{\text{inicial}} = 2\,g\,R\,\Delta\theta/2\,\sin(\pi/2 - k \cdot \Delta\theta/2)$

donde R es el radio de la circunferencia. Ahore se puede verificar que

$$\sin(\pi/2 - k \cdot \Delta\theta/2) = \cos(k \cdot \Delta\theta/2),$$

Entonces

$$\text{en el tramo k-ésimo, se tiene } V^2_{k\,\text{final}} - V^2_{k\,\text{inicial}} = 2\,g\,R\,\Delta\,\theta/2\,\cos(k\cdot\Delta\,\theta/2)$$

En el siguiente tramo, la velocidad final del tramo anterior es la velocidad inicial en el nuevo tramo:

$$\text{en el tramo (k+1)-ésimo, se tiene } V^2_{(k+1)\text{final}} - V^2_{k\,\text{final}} = 2\,g\,R\,\Delta\,\theta\,\sin(\pi/2 - k\cdot\Delta\,\theta/2)$$

y así sucesivamente, se obtiene una serie telescópica, con el resultado final:

$$V^2_{\text{final}} - V^2_{\text{inicial}} = 2\,g\,R\,\Delta\,\theta\sum_{k=1}^{k=n}\{\cos\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,2\,\Delta\,\theta/2 + ... + \cos\,k\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,(n-1)\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,n\,\Delta\,\theta/2\}$$

Mirando en google (http://www.9math.com/book/sum-trigonometric-function-argument-arithmetic-progresion) este resultado o en una tabla de matemáticas, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\{\cos\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,2\,\Delta\,\theta/2 + ... + \cos\,k\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,(N-1)\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,N\,\Delta\,\theta/2\} = \frac{\sin\frac{(N+1)\,\Delta\,\theta/2}{2}}{\sin\frac{\Delta\,\theta/2}{2}}\cos\frac{N\,\Delta\,\theta/2}{2}$$

Recordando los límites establecidos para N y $\Delta\,\theta/2$ y el producto de ambos, tenemos:

$$V^2_{\text{final}} - V^2_{\text{inicial}} =$$

$$= 2\,g\,R\,\Delta\,\theta\,[-1/2*\cos((n+1)*\Delta\,\theta/2) - 1/2*\sin(\Delta\,\theta/2)*\sin((n+1)*\Delta\,\theta/2)/(\cos(\Delta\,\theta/2)-1)+1/2] =$$

$$= -\,g\,R\,[1-\sin(\theta)]$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\{\cos\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,2\,\Delta\,\theta/2 + ... + \cos\,k\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,(n-1)\,\Delta\,\theta/2 + \cos\,n\,\Delta\,\theta/2\}$$

En definitiva , la expresión final es :

$$V^2_{\text{final}} - V^2_{\text{inicial}} = 2\,g\,R\,[1-\sin\theta]$$

La velocidad depende sólo de las diferencias de altura entre el punto inicial (partida) y final.
Esta es la expresión a usar para encontrar la velocidad en el punto indicado en los problemas 3 y 4.

Es necesario aclarar acerca del factor R. Lo haré en clases.