FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

FÍSICA I

Profesores: Andrés Meza, Patricio Parada, Nelson Zamorano

Guía de Problemas de Geometría

OBJETIVOS

El objetivo de esta guía de problemas es ayudarlo a desarrollar las destrezas necesarias para estudiar fenómenos de mecánica. En esta guía nos concentraremos exclusivamente en problemas de geometría, pues en muchas oportunidades una adecuada descripción geométrica puede simplificar en forma considerable la solución de un problema o ayudar a desarrollar intuición sobre lo que ocurre en un determinado fenómeno.

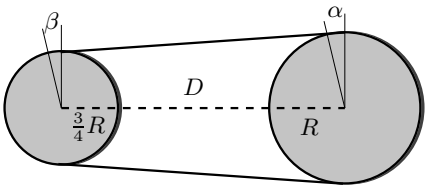
Esta guía consta de 15 problemas de similar dificultad que abarcan problemas en cálculo de áreas y volúmenes, trigonometría, relaciones angulares en triángulos y geometría analítica.

PROBLEMAS

1. *a*) Encuentre el valor de los ángulos α y β que miden el alejamiento angular del punto de contacto de la correa y la circunferencia con respecto a la vertical.

   b) Calcule el largo de la cuerda que rodea a dos cuerdas de radios R y $3R/4$ cuyos ejes están separados por una distancia D.

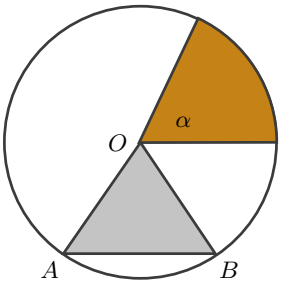
   c) Calcule el área encerrada por los segmentos de la cuerda situada entre los puntos en que toca a las ruedas y la circunferencia de cada una de las ruedas.



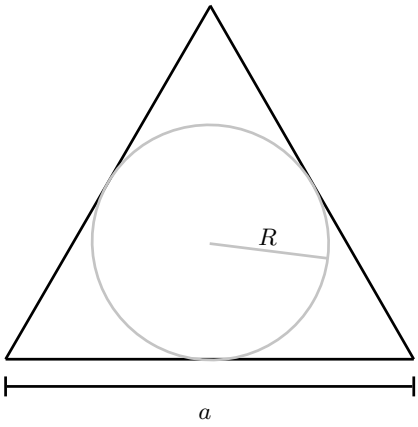
2. *a*) Calcule el área del triángulo ABO en función del ángulo $\angle AOB$. Grafique el área de este triángulo en función de α.

   b) Encuentre el valor del ángulo central del triángulo isósceles OAB, cuyo vértice es el centro de la circunferencia y que tiene la misma área que el sector circular cuyo ángulo central es α. Note que esto no es posible para valores arbitrarios del ángulo α. Para darse cuenta de ello basta pensar el caso $\alpha = \pi$.

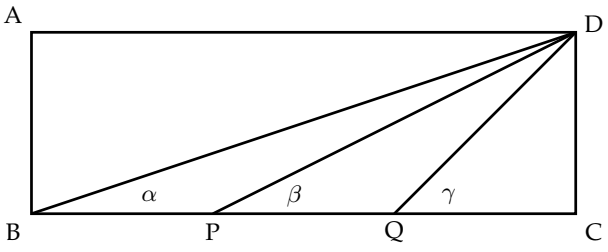
   c) Determine el máximo valor de α (en radianes) para el cual el triángulo isóceles descrito existe.



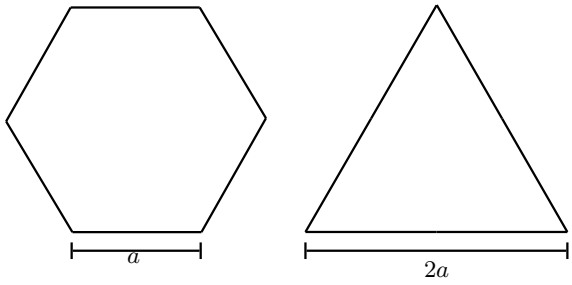
3. Calcule la razón entre las áreas de un círculo de radio R y del triángulo equilátero de lado a que lo contiene. Exprese el radio R en función de a.



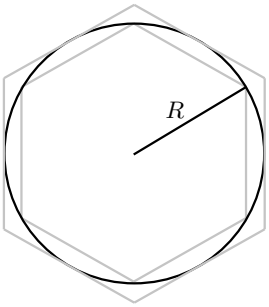
4. Considere un rectángulo $ABCD$ donde el lado $BC = 3AB$, y P, Q son dos puntos sobre el lado BC que dividen el lado en tres partes iguales, es decir, donde $BP = PQ = QC$. Demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$.



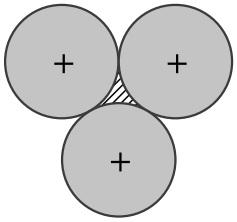
5. *a*) Si un hexágono regular y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro, determine la razón entre sus áreas.



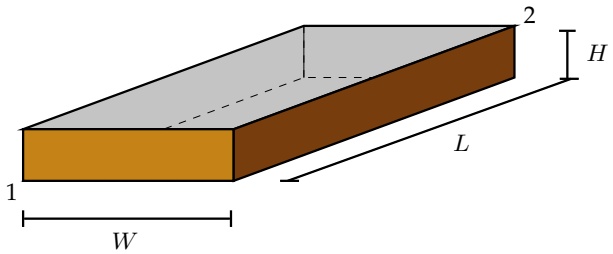
b) Dado un círculo de radio R, determine el área del hexágono regular circunscrito y el área del hexágono regular inscrito. Compare con el área de la circunferencia.



6. Tres círculos de igual radio R se colocan tangentes entre sí como muestra la figura. Calcule el área achurada que se forma en el centro.



7. Un caracol requiere movilizarse en el menor tiempo posible desde el vértice 1 (inferior izquierdo) hasta el vértice 2 (superior derecho) de la caja rectangular de la figura. Los lados de esta caja son $L > W > H$. Como la rapidez (o lentitud) del caracol es constante, para minimizar su tiempo de viaje debe utilizar la trayectoria ms corta entre estos dos puntos. Encuentre la trayectoria que debe seguir el caracol.



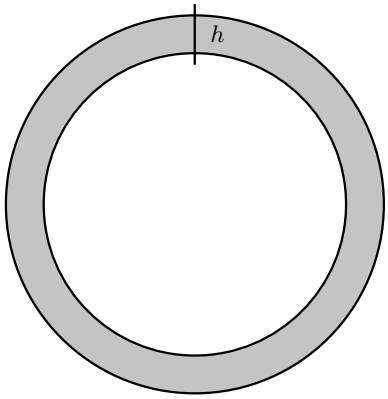
8. Suponga que la Tierra es una esfera de radio 6390 [km] y que sobre el Ecuador se tiende una cinta que la rodea. Suponga que alguien desea levantar esta cinta de manera que una persona de 2 m de alto pueda pasar justo bajo ella en cualquier lugar del Ecuador.

a) En cuántos metros debe aumentarse el largo de la cinta?

b) Muestre que en el caso de una circunferencia y un triángulo se cumple que el área extra que se añade es

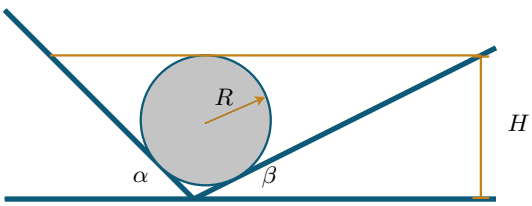
$$\text{Área adicional } = Ph + \pi h^2$$

donde P es el perímetro de la figura. Este resultado es válido para cualquier figura cóncava cuyo contorno se extiende en un valor h.



c) Suponga que, producto de la buena comida consumida en las fiestas de fin de año, debe acomodar su cinturón en el siguiente agujero. Calcule la superficie de tejido adiposo que agregó a su cuerpo a la altura de su cinturón.
Indicación: Para hacer este cálculo puede modelar su cintura como una circunferencia de perímetro P, donde P es la longitud medida desde uno de los extremos de su cinturón a la posición en que abrochaba su cinturón antes de las Fiestas. Puede suponer que el ancho del cinturón es W y que la distancia entre los agujeros es d.

9. Una esfera de radio R se coloca en el fondo de una cuneta caracterizada por los ángulos α y β.

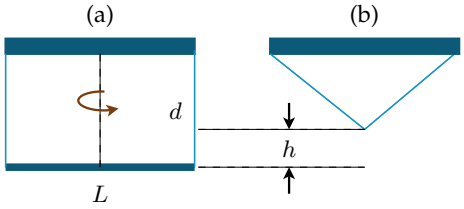


Suponiendo que la esfera no se despega del fondo, determine el nivel necesario de agua H para sumergirla completamente. Verifique su resultado para el caso $\alpha = \beta$.

10. Una barra muy delgada de largo L cuelga del techo sostenida de sus extremos por sendos hilos de largo d. Los hilos caen perpendicularmente a la barra.

    a) Calcule la altura h que se eleva la barra al hacerla girar en 90 .

    b) Usando materiales a su alcance, compruebe experimentalmente su resultado. Qué condición debe cumplir d para que esta operación se pueda realizar?



11. Considere un triángulo isósceles con un vértice de $36°$ y lados 1 y x (figura a).

    a) Si la recta AD es la bisectriz del ángulo del vértice A:

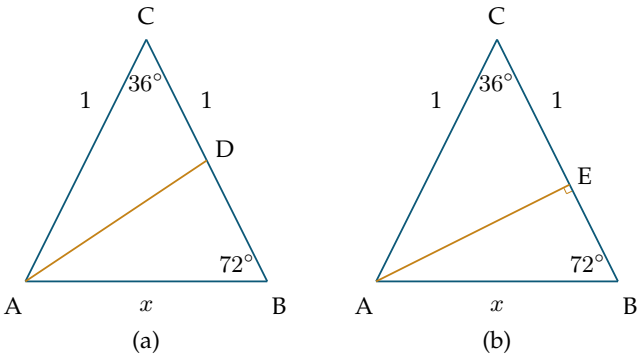
    I) Cuánto vale el ángulo $\angle BAD$?

    II) Cuánto vale el ángulo $\angle ADB$?

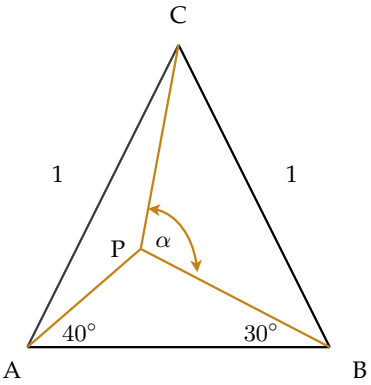
    III) Cuánto vale el segmento DB en función de x? Use el hecho que el triángulo ΔABC es congruente con el triángulo ΔABD.

    b) Trace una perpendicular al lado BC en un punto E de forma tal que ella pase por el vértice A del triángulo (figura b). Esta recta divide el trazo BC de manera que $EB = DB/2$, donde D es el punto donde la bisectriz de la parte *(a)* corta al lado BC. Cuál es el largo de esta perpendicular? Exprese su resultado en función de x, el largo de la base del triángulo original.

    c) Usando la figura b, donde aparece AE, encuentre el valor de x. Para obtener este resultado, considere el triángulo rectángulo ΔAEC.



12. Encuentre el valor del ángulo α indicado en el triángulo de la figura. El triángulo es isósceles y el valor del ángulo en el vértice C es de $80°$. A partir del vértice A se traza una recta que hace un ángulo de $40°$ con la base del triángulo. Lo mismo se hace a partir de B, pero en este caso el ángulo que se forma es de $30°$. En la intersección de estas dos rectas, el punto P, se traza una recta hasta el vértice C. Suponga que los lados AC y BC tienen un largo unitario.

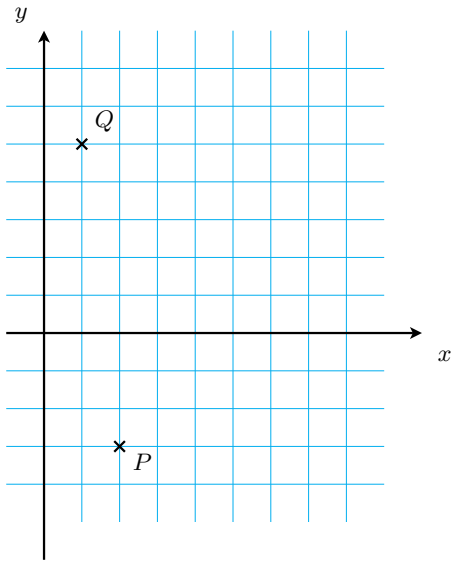


13. Dados dos puntos P (2,-3) y Q (1, 5), en el sistema cartesiano (x, y):

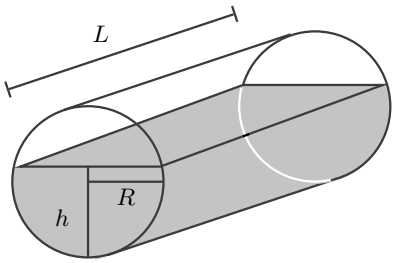
    a) Encuentre la distancia entre ellos.

    b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos e indique el valor de su pendiente.

    c) Escriba la ecuación de una recta perpendicular a PQ y que pasa por el origen.



14. Un cilindro recostado de radio R y largo L contiene líquido hasta una altura h como indica la figura. Calcule la nueva altura del líquido cuando el cilindro se coloca en posición vertical.



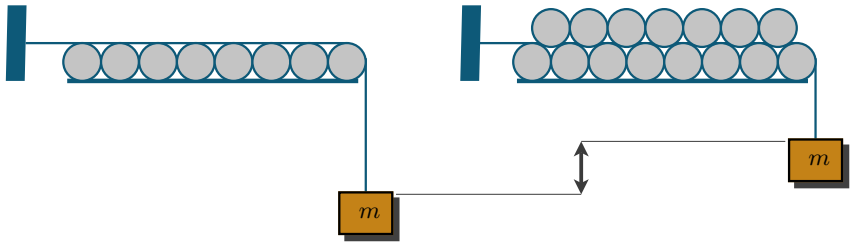
15. Se tiene un conjunto de n cilindros de radio R alineados sobre una superficie plana y tocándose con sus vecinos. Los cilindros no pueden moverse. Utilizaremos una cuerda inextensible de largo L para colgar una masa m de uno de sus extremos, mientras el otro está conectado a una superficie vertical en un punto de altura $2R$ con respecto a la superficie horizontal, tal como lo indica la figura.

    Ahora suponga que usted instala $(n-1)$ cilindros idénticos sobre la base formada por los n cilindros, tal como se muestra en la figura. Cuánto sube el extremo de la cuerda que tiene la masa m con respecto a la situación inicial?

    Indicación: Ud. puede resolver el problema como más le acomode, pero incluimos algunas indicaciones que pueden ser útiles:

    I) No se incomode con el dato de n o $(n-1)$ cilindros. En un comienzo sólo necesita ver qué sucede con tres cilindros solamente: uno arriba y dos abajo. Resuelva este caso primero y después examine el de n cilindros. Esta forma de abordar el problema se denomina *inducción matemática*.

    II) La cuerda no tiene espesor y va pegada a los cilindros en la zona ocupada por ellos.

    III) El orden es como sigue: la cuerda llega horizontal y tangente al primer cilindro (el de más a la izquierda), después sigue el arco de ese cilindro hasta el punto de contacto con el cilindro superior, desde allí se pega al superior hasta el siguiente punto de contacto con el inferior y así sucesivamente.

    IV) Debe evaluar el arco de circunferencia en cada caso para determinar el camino recorrido por la cuerda.