

P4) Energía se conserva pues la única fuerza (de Gravitación) es conservativa con

$U = -\frac{GmM}{r}$. Si v_m y v_M son las velocidades (clra un sistema inercial) cuando la separación es d ; entonces:

$$E = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{GmM}{d} \quad (1)$$

Inicialmente d es muy grande; y las partículas están en reposo; luego

$$E = \frac{1}{2} m v_{m_i}^2 + \frac{1}{2} M v_{M_i}^2 - \frac{GmM}{d_i} = 0 \quad (2)$$

$(v_{m_i}=0)$ $(v_{M_i}=0)$ $(d_i \rightarrow \infty)$

\Rightarrow de ① y ②

$$\left| \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{GmM}{d} = 0 \right| \quad (3)$$

Ahora; como \nexists fuerzas externas al sistema $m+M$; entonces:

$$m \vec{a}_m + M \vec{a}_M = (m+M) \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\Rightarrow m \vec{v}_m + M \vec{v}_M = (m+M) \vec{v}_{CM} = \text{cte} \quad (4)$$

Pero; inicialmente $\vec{v}_{m_i} = \vec{v}_{M_i} = 0 \Rightarrow$

$$m\vec{v}_{m_i} + M\vec{v}_{M_i} = 0 \quad (5)$$

de (4) y (5)

$$\boxed{m\vec{v}_m + M\vec{v}_M = 0} \Rightarrow \vec{v}_M = -\frac{m}{M}\vec{v}_m \quad (6)$$

NB: si $M \gg m$; $\vec{v}_M \approx 0$ y m se "cae" sobre M ;
sin que esta última se mueva.

Reemplazando (6) en (3)

$$\frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} v_m^2 = \frac{6mM}{d}$$

$$\frac{1}{2} m \left(1 + \frac{m}{M}\right) v_m^2 = \frac{6mM}{d}$$

$$\Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{26M^2}{(m+M)d}}$$

(7)

rapidez de m

rapidez de M

$$\text{De (6); } |\vec{v}_M| = \frac{m}{M} |\vec{v}_m| \Rightarrow v_M = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{26M^2}{(m+M)d}}$$

(vector)

Veamos ahora la velocidad relativa. Por la

transformación Galileana de velocidades; sabemos que:

$$\boxed{\vec{v}_{m/o} = \vec{v}_{M/o} + \vec{v}_{m/M}} \quad \leftarrow \text{Velocidad de } m \text{ r/a } M$$

$\vec{v}_{m/o}$: velocidad de m c/r al origen O (sist. inercial)
 $\vec{v}_{M/o}$: velocidad de M c/r al origen O (sist. inercial)
 $\vec{v}_{m/M}$: velocidad de m c/r a M

[calculada arriba]

$$\Rightarrow \vec{v}_{m/M} = \vec{v}_{m/o} - \vec{v}_{M/o} \quad \leftarrow \text{por ecn (6)}$$

$$\vec{v}_{m/M} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \vec{v}_{m/o}$$

$$\Rightarrow v_{m/M} = \frac{M+m}{M} \cdot \sqrt{\frac{2GM^2}{(m+M)d}} = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{d}} \quad \text{[unidades OK]}$$

\uparrow
 por (7)

