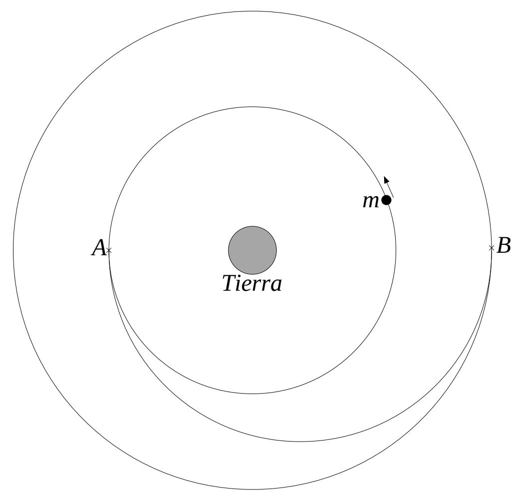
Introducción a la Física - Sección 7
Ejercicio N^o 16
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Rodrigo Soto
4 de septiembre de 2006
Tiempo: 30 minutos

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta es correcta cuando tanto el método como el resultado son correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

Se tiene un satélite de masa m que se mueve en torno a la Tierra en una órbita circular de radio R_A. Se desea cambiar la órbita del satélite para que quede en una nueva órbita circular de radio R_B ($R_B > R_A$). Para eso, en el punto A se prenden los motores por un intervalo muy corto, entregándole al satélite una cantidad de energía ΔE_A, de manera que quede en una órbita elíptica de radio mayor R_B.
Al llegar al punto B se prenden nuevamente los motores por un intervalo muy corto, entregándole al satélite una cantidad de energía ΔE_B, de manera que ahora queda en una órbita circular de radio R_B.



Calcule los valores de ΔE_A y ΔE_B.

Nota: La masa de la Tierra M_T es dato conocido.

Solución:
La órbita inicial es circular de manera que aplicando la ley de Newton se encuentra la velocidad de la órbita en A:

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{R_A}}$$

de manera que la energía inicial es

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{R_A}$$

Luego de entregarle la energía ΔE_A, el satélite tendrá una nueva velocidad v'_a que se obtiene de imponer que

$$E'_A = E_A + \Delta E_A$$

es decir

$$\frac{1}{2}mv_A'^2 - \frac{GMm}{R_A} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{R_A} + \Delta E_A$$

de donde se despeja

$$v'_A = \sqrt{v_A^2 + 2\Delta E_A/m}$$

Ahora se quiere imponer que con esta nueva velocidad llegue al punto B. Para eso se usa conservación de energía y momento angular

$$\begin{aligned} mR_A v'_A &= mR_B v_B \\ \frac{1}{2}mv_A'^2 - \frac{GMm}{R_A} &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{R_B} \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{R_A v'_A}{R_B} \\ &= \frac{R_A\sqrt{v_A^2 + 2\Delta E_A/m}}{R_B} \\ &= \frac{R_A\sqrt{GM/R_A + 2\Delta E_A/m}}{R_B} \end{aligned}$$

donde se fueron usando los valores de v'_A y v_A ya obtenidos.
Al reemplzar en la ecuación de energía se obtiene

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R_A} + \frac{2\Delta E_A}{m}\right) - \frac{GMm}{R_A} = \frac{1}{2}m\frac{R_A^2}{R_B^2}\left(\frac{GM}{R_A} + \frac{2\Delta E_A}{m}\right) - \frac{GMm}{R_B}$$

de donde se despeja ΔE_A

$$\Delta E_A = \frac{GMm}{2R_A}\left(\frac{R_B - R_A}{R_B + R_A}\right)$$

Otra forma (mucho más fácil) de encontrar la solución consiste en usar el resultado de clases que relaciona la energía total al semieje mayor de la elipse. Efectivamente se tenía

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

En la órbita circular inicial $a_{\text{ini}} = R_A$ y en la órbita elíptica $a_{\text{fin}} = (R_A + R_B)/2$. Luego

$$\begin{aligned}
\Delta E_A &= -\frac{GMm}{2a_{\text{fin}}} + \frac{GMm}{2a_{\text{ini}}} \\
&= -\frac{GMm}{R_A + R_B} + \frac{GMm}{2R_A} \\
&= \frac{GMm}{2R_A}\left(\frac{R_B - R_A}{R_B + R_A}\right)
\end{aligned}$$

Para el impulso en B usamos este segundo método. La órbita inicial es la elíptica con $a_{\text{ini}} = (R_A + R_B)/2$ y la final es la circular con $a_{\text{fin}} = R_B$. Luego

$$\begin{aligned}
\Delta E_B &= -\frac{GMm}{2a_{\text{fin}}} + \frac{GMm}{2a_{\text{ini}}} \\
&= -\frac{GMm}{2R_B} + \frac{GMm}{R_A + R_B} \\
&= \frac{GMm}{2R_B}\left(\frac{R_B - R_A}{R_B + R_A}\right)
\end{aligned}$$