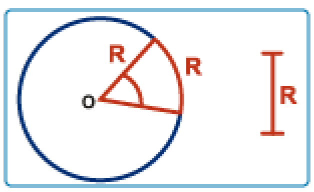
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Introducción a la Física FI10A-02
Profesor: Andrés Meza
Prof. Auxiliar: Sergio Godoy
Prof. Auxiliar: Valentina Quiroga
Prof. Auxiliar: Daniel Valenzuela

GUÍA DE PROBLEMAS 1
08 Marzo 2006

Objetivos
1:: Ángulos. Sistema sexagesimal y radianes.
2:: Funciones e identidades trigonométricas. Aplicaciones.
3:: Aproximaciones numéricas.
4:: Geometría. Cálculo de áreas y volúmenes.
5:: Estimaciones y ordenes de magnitud.

1. **¿Que es un Radián?**
   i) Con un compás, dibuje un círculo en un papel. No olvide marcar el centro.
   ii) Corte varios trozos de hilo, todos con un largo igual al radio de la circunferencia. ¿Cuántos de estos trozos de hilo se necesitan para cubrir el largo de la circunferencia? O puesto de otro modo, ¿cuántos radios caben en el largo de la circunferencia?
   iii) Mida el ángulo que subtiende uno de estos trozos de cuerda. Esto es por definición **UN RADIÁN**.



   iv) Repita las operaciones anteriores para una circunferencia de mayor radio que la anterior.
   v) Compare el valor del ángulo subtendido por el radio en ambos casos.
   vi) Dado que el ángulo medido en radianes se obtiene a partir de la razón entre dos segmentos, ¿cuál debe ser la dimensión de un radián?

2. ¿A cuántos radianes equivale un segundo? ¿A cuántos segundos equivale un radián?

3. Exprese en radianes los ángulos:
   i) 45°
   ii) 105°
   iii) 22° 30'
   iv) 18°

4. Exprese en grados sexagesimales los ángulos:
   i) 3π/4
   ii) 7π/45
   iii) 5π/27
   iv) 5π/24
   v) 0,3927

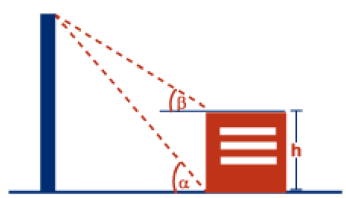
5. Demuestre que:
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\tan\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\cot\alpha=1.$$

6. Determine el valor numérico de:
$$3\tan^2 30°+\frac{1}{4}\sec 60°-5\operatorname{sen}^2 60°.$$

7. Determine el ángulo de elevación del Sol cuando la sombra de un poste de 6 m de altura es de $2\sqrt{3}$ m de largo.

8. El punto medio de uno de los lados de un cuadrado se une a uno de los vértices opuestos del mismo, encuentre la magnitud de los dos ángulos que se formaron en ese vértice.

9. El ángulo de elevación de la parte superior de una columna vista desde el pie de una torre es α y desde la parte superior de la torre es β. Si la torre tiene una altura h, ¿cuál es la altura de la columna?



10.
   i) Dado $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
   ii) Dado $\tan 135°=-1$, calcule $\operatorname{sen}135°$.
   iii) Dado $\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2$, calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ y $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
   iv) Si $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, evalúe $\operatorname{sen}\alpha$ y $\tan\alpha$.
   v) Si $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, calcule $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ y $\sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

11. Determine el valor de:
   i) $\cos(480°)$
   ii) $\operatorname{sen}(960°)$
   iii) $\cos(-780°)$
   iv) $\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{4}\right)$
   v) $\cot\left(\frac{23\pi}{4}\right)$
   vi) $\sec\left(\frac{7\pi}{3}\right)$
   vii) $\operatorname{sen}(1{,}125°)$
   viii) $\operatorname{sen}(855°)$
   ix) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

12. Simplifique las siguientes expresiones:
   i) $\dfrac{\operatorname{sen}(-\beta)}{\operatorname{sen}(180°+\beta)}-\dfrac{\tan(90°+\beta)}{\cot(\beta)}+\dfrac{\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(90°+\beta)}$
   ii) $\dfrac{\cos(90°+\beta)\sec(-\beta)\tan(180°-\beta)}{\sec(360°+\beta)\operatorname{sen}(180°+\beta)\cot(90°+\beta)}$

13. Demuestre que:
   i) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$
   ii) $\operatorname{sen}(\alpha+45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)$
   iii) $\cos(\alpha+45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$
   iv) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$

14. Compruebe las siguientes identidades:
   i) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta=\cos\alpha$
   ii) $\operatorname{sen}(3\alpha)\cos\alpha-\cos(3\alpha)\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(2\alpha)$
   $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha$
   iii) $1+\tan(2\alpha)\tan\alpha=\sec(2\alpha)$
   iv) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=\tan\alpha$
   v) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\sec\alpha}=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

15. **Aproximaciones.**
   Haciendo uso de la siguiente aproximación $(1+x)^R\approx 1+Rx$, válida para $|x|<<1$, calcule en forma aproximada **(sin usar calculadora)** los siguientes valores (use $\pi\approx 3{,}14$):
   i) $\sqrt{1{,}001}$
   ii) $\sqrt{0{,}98}$
   iii) $\sqrt{102}$
   iv) $\sqrt{\pi}$
   v) $\frac{1}{\pi}$
   vi) π^2
   vii) $\sqrt{2}$
   viii) $\sqrt{60{,}5}$

16. Haciendo uso de esta misma aproximación calcule los siguientes cuocientes:
   i) $\frac{1}{101}$
   ii) $\frac{905}{77}$
   iii) $\frac{303}{220}$
   iv) $\frac{\sqrt{50}}{703}$
   v) $\frac{800}{802}$
   vi) $\frac{\sqrt{88}}{0{,}015}$

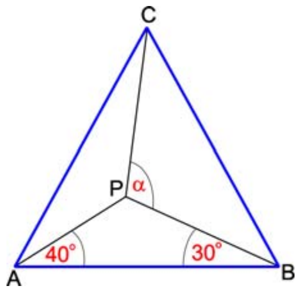
17. Verifique numéricamente (por ejemplo usando Excel o una calculadora) la siguiente igualdad

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

18. En un tablero de ajedrez hay 64 casilleros (8 por lado). En el primero de ellos se pone un grano de maíz; en el segundo el doble del anterior; en el tercero el doble del anterior y así sucesivamente. Calcule el número aproximado de granos de maíz que se requieren para toda la operación y estime su volumen. Compárelo con el volumen de la Tierra.

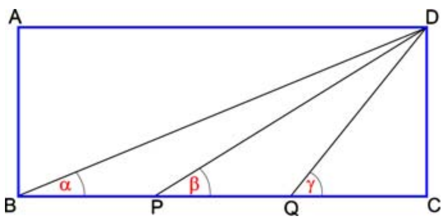
19. Una hoja de papel tipo carta es doblada por la mitad, de esta manera el área resultante es la mitad y el espesor es el doble de la hoja original. Si este proceso se repite sucesivamente, estime el número de veces que se debe doblar una hoja para que el espesor cubra la distancia que separa a la tierra de la Luna. Calcule el área de la hoja resultante al final del proceso. Compare este número con el tamaño de un átomo.

20. En un triángulo isósceles se traza a partir de A una recta que forma un ángulo de 40° con la base del triángulo. Lo mismo se hace a partir de B, pero en este caso el ángulo que se forma es de 30°.

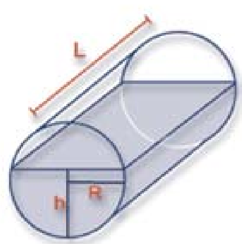


En la intersección de estas dos rectas (punto P) se traza una recta hasta el vértice C. Si el valor del ángulo en el vértice C es 80°, determine el valor del ángulo α. Suponga que AC = BC = 1.

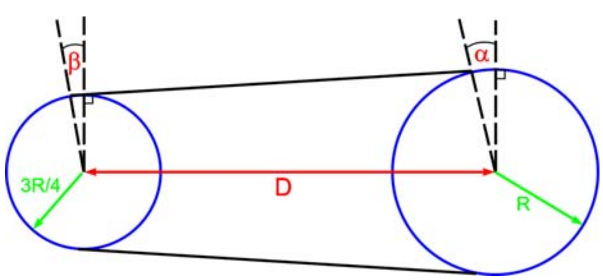
21. Sea ABCD un rectángulo con BC = 3AB. Los puntos P y Q sobre el lado BC son tales que BP = PQ = QC. Muestre que $\alpha + \beta = \gamma$.



22. Un cilindro recostado de radio R y largo L contiene líquido hasta una altura h como indica la figura. Calcule la nueva altura del líquido cuando el cilindro se coloca en posición vertical.

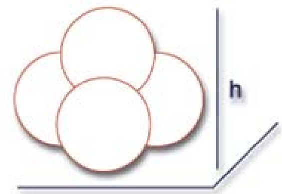


23. Dos discos de radios R y 3R/4 están unidos por un eje de largo D y una correa ideal (sin grosor) que permanece siempre estirada.

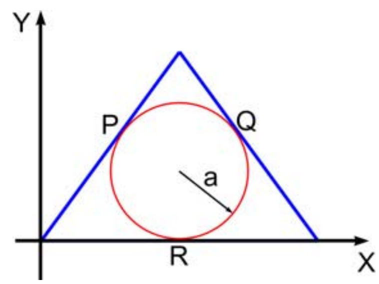


i) Encuentre el valor de los ángulos α y β que forman la línea perpendicular al eje que une ambos centros y los respectivos puntos de contacto entre la correa y los discos.
ii) Calcule el largo de la correa que rodea a los discos y el área encerrada por la correa.

24. Cuatro esferas de radio R se apilan tocándose entre sí. Tres de las esferas están sobre una base horizontal, mientras la cuarta esfera reposa sobre las otras tres. Calcule la altura h desde la base a la cima.



25. Encuentre la ecuación de cada una de las rectas que forman el triángulo equilátero de la figura. Elija el origen de coordenadas en uno de sus vértices. Determine la ecuación de la circunferencia inscrita de radio a. ¿Qué ecuaciones satisfacen los puntos P, Q y R?



Ordenes de Magnitud.

"Conocer el grado de precisión que permite la naturaleza del problema y no buscar exactitud donde sólo una verdad aproximada es posible, constituye el sello de una mente entrenada."

Aristóteles

26. Estime cuántos trabajadores se necesitaron para construir la pirámide de Keops. Necesita recolectar datos como la densidad de las piedras, el tamaño de las pirámides, cuánto trabajo puede hacer un hombre en un día, la energía potencial de la pirámide y hacer algunas suposiciones como la siguiente: dónde se encontraban las piedras utilizadas.
Referencia: Juegos matemáticos, Ian Stewart, "Investigación y Ciencia", Noviembre 1998, pag. 86. (Problema 28).

27. Benjamín Franklin notó que al dejar una gota de aceite en la superficie de un lago, ésta no se esparcía más allá de una cierta superficie. También notó que si el número de gotas de aceite se aumentaba al doble, el área cubierta también se duplicaba. Concluyó que dicho valor era el máximo posible que una cierta cantidad de aceite lograba extenderse. Al realizar el experimento notó que 0,1 cm^3 de aceite cubrían un área de 40 cm^2 aprox. ¿De qué espesor es la capa de aceite?

En el tipo de aceite que Franklin usó se puede suponer que cada molécula tenía 10 átomos. Si la distancia entre átomos de una molécula en un líquido o gas corriente es de $1Å=10^{-10}$ m, ¿de cuántos átomos de espesor era la película de aceite formada?

28. i) Estime la distancia promedio que separa a cada molécula de agua líquida H_2O, utilizando sólo los siguientes datos:
    - el agua líquida tiene una densidad de 1 g cm^{-3}.
    - 18 g de agua líquida contienen $N=6{,}02\times10^{23}$ moléculas de H_2O.

    ii) Si la densidad del hielo disminuye en un 8% con respecto al agua líquida, calcule el cambio porcentual en la distancia entre moléculas en ambos estados.