



## Capítulo VII

# GRAVITACION

### VII.1. INTRODUCCION

La ley de gravitación universal de Newton posee una expresión muy simple y se verifica en una amplia escala de distancias. Tiene el gran mérito de describir –en base a una sola definición–, fenómenos locales, como la caída de un pedazo de tiza en la superficie de la Tierra, hasta el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Sus aplicaciones se extienden a distancias aún mayores: a una galaxia, o, a escalas cosmológicas, a la descripción del universo, donde provee una excelente aproximación.

El poder de esta ley, que logró explicar con una misma fórmula, un gran número de fenómenos, la transformó en casi un dogma.

Por ejemplo, su aplicación al estudio de la trayectoria de los planetas, a comienzos del siglo pasado, permitió establecer la existencia de Neptuno, antes de que éste fuera observado por los astrónomos.

Efectivamente, en 1841, John Couch Adams, estudiante de la Universidad de Cambridge, al analizar la trayectoria de Urano, encontró que las anomalías descubiertas en su órbita, podían explicarse mediante la existencia de otro planeta –aún no observado– que orbitaba alrededor del Sol. Para llegar a esta conclusión, empleó los resultados de la Mecánica Celeste, que es un formalismo que incorpora las leyes de Newton y de la gravitación universal, al estudio del movimiento de los planetas incluyendo, además de la atracción gravitacional del Sol, la interacción entre ellos.

Los astrónomos no prestaron atención a este resultado. Sólo cinco años más tarde, en 1846, fue observado en una posición muy cercana a la predicha, por Johan Gotfried Galle, quien lo hizo a instancias del teórico francés Urbain Jean Joseph Le Verrier, que había llegado a la misma conclusión que Couch, en 1845.

Una predicción similar a la anterior fue hecha con respecto a la existencia de Plutón, a principios de este siglo. Las desviaciones observadas en la órbita de Urano y Nep-

tuno podían ser explicadas mediante la atracción gravitacional de un objeto extraño que supuestamente orbitaba en dicha región del espacio.

Plutón fue descubierto, fortuitamente, en 1929. Los cálculos empleados en la predicción de su órbita contenían errores y la trayectoria anunciada no coincidió con la observada.

Conviene aclarar que la solución al problema de tres (o más) cuerpos en el espacio, cuyas trayectorias están determinadas por la atracción gravitacional mutua, *no tiene solución analítica*. Es decir, el movimiento del sistema no puede ser descrito en base a funciones conocidas. Las órbitas deben obtenerse mediante métodos numéricos o *aproximaciones* analíticas.

Se denomina sistema binario a un par de estrellas girando, una en torno de la otra. Constituyen otro campo en el cual las leyes de Newton han contribuido a descubrir un objeto invisible. En estos casos, al observar una estrella –aparentemente solitaria– que describe un movimiento periódico alrededor de un punto en el espacio, podemos deducir, que existe un objeto invisible que la mantiene en órbita.

Dependiendo de los datos observacionales disponibles, se pueden estimar algunas características de la estrella invisible. La más importante –en particular en la búsqueda de agujeros negros– es su masa.

Los agujeros negros son estrellas que están colapsando debido a su propia atracción gravitacional, hasta desaparecer de la vista, pero que dejan como remanente, su intenso campo gravitacional. Para que una estrella alcance un comportamiento como el descrito, debe llegar a la última etapa de su evolución, con una masa superior a tres veces la masa del Sol. Los candidatos más serios a agujeros negros en nuestro sistema solar, son *Cygnus X-1*, y *V404 Cygni*, cada uno de ellos pertenece a un sistema binario; son los acompañantes invisibles de otra estrella luminosa y las estimaciones más conservativas los clasifican como estrellas en su última etapa de evolución, con una masa equivalente a la de –aproximadamente– seis masas solares cada una.

De este modo podemos apreciar la diferencia que existe entre una ley física: la gravitación universal de Newton, por ejemplo, y una empírica, como la usada en la descripción del roce. Un experimento que no se ajuste a esta última, no lleva a pensar en nuevos fenómenos físicos, sino más bien indica los límites de la aproximación. En cambio, una leve desviación de la esperada a partir de la ley de gravitación universal, *sugiere* la existencia de un objeto nuevo en el espacio.

Es conveniente señalar que la gravitación universal propuesta por Newton, es una *excelente aproximación*, pero no es la teoría definitiva. En 1850, Le Verrier, ya citado anteriormente, conocía de una pequeña discrepancia existente entre la trayectoria de Mercurio y las predicciones de la Mecánica Celeste que, como sabemos, está fundada sobre las leyes de Newton. El desacuerdo entre observación y teoría, fue resuelto por Albert Einstein en 1915, cuando anunció que dentro del esquema de su nueva teoría de

la gravitación, la relatividad general, desaparecía la discrepancia: la nueva trayectoria obtenida, se ajustaba a la observada en el planeta Mercurio. Este resultado y otros más, dieron –mercidamente– a Einstein el prestigio que hoy le rodea.

La base teórica de la relatividad general es la geometría y sus efectos son –al menos aquí en la Tierra– difíciles de medir por la gran precisión que es necesario utilizar. En general, las teorías Newtonianas son suficientes para entender una amplia gama de fenómenos.

Finalmente, mencionaremos dos suposiciones que introduce la ley de gravitación universal, sin procurar explicación alguna para ellas: establece que la interacción gravitacional entre dos cuerpos ocurre en forma instantánea, y que la fuerza gravitacional se transmite a través del espacio vacío, sin necesidad de un medio que la sustente. A cambio de esto proporciona una formulación matemática que describe una infinidad de fenómenos, algunos de ellos que anteriormente parecían no estar relacionados. Los enigmas que introduce son mínimos, comparados con los que resuelve.

## VII.2. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

### VII.2.1. Fuerzas proporcionales al inverso del cuadrado de la distancia

Examinemos la semejanza que pudiera existir entre la caída de un cuerpo en la superficie de la Tierra y el movimiento de la Luna alrededor de nuestro planeta. La idea de Newton fue la siguiente: los objetos caen debido a la atracción gravitacional de la Tierra; lo mismo debe suceder con la Luna, si esta fuerza se extiende hasta su posición. La Luna describe aproximadamente una circunferencia alrededor de la Tierra. Este cambio en la trayectoria rectilínea señala la existencia de una aceleración que permanentemente la está desviando. Note, que al hacer esta afirmación, estamos suponiendo –implícitamente– que las leyes de Newton son válidas para objetos como la Luna; ubicados a una gran distancia y de una dimensión mucho mayor que las usuales en la Tierra.

Newton argumentó que la Luna estaba cayendo hacia la Tierra, pero que debido a la magnitud de su velocidad orbital, el cambio de dirección experimentado, se compensaba con la curvatura de la superficie de la Tierra, de modo que la velocidad permanecía paralela a ella, y el radio de su órbita se mantiene constante, como ilustra la Figura [VII.1].

Newton afirmaba que al lanzar un objeto desde la cima de una montaña (ver Figura [VII.1]), con una velocidad de  $\sim 90,000$  km/h, veríamos que el objeto se perdía en el horizonte, sin alcanzar la superficie. Argumentaba, que la curvatura experimentada por la trayectoria de la partícula, coincidía con aquella de la esfera terrestre, por lo tanto, se

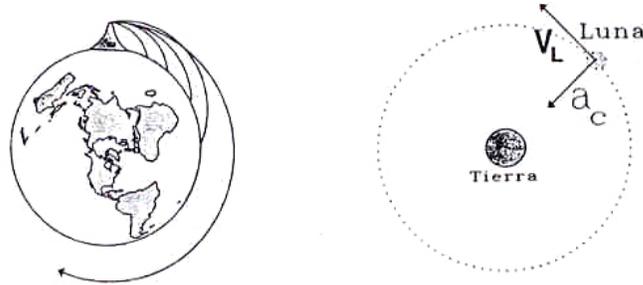


Figura VII.1: Órbita de una partícula lanzada con distintas velocidades desde una montaña, de acuerdo al experimento concebido por Newton. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre de la Luna, considerada como un punto, orbitando la Tierra.

mantenía en órbita, sin caer nunca.

Examinemos los números que caracterizan el movimiento de la Luna, e investiguemos si este razonamiento coincide con las observaciones. Su período es de 27.3 días y el radio de la órbita alrededor de la Tierra –que suponemos circular– es:

Distancia Luna–Tierra =  $3,84 \times 10^8 \text{ m} \approx 60 \times R_{\oplus}$ , con  $R_{\oplus} \equiv$  radio de la Tierra.

Con estos datos podemos calcular la velocidad orbital de la Luna:

$$v_{\text{Luna}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 3,84 \times 10^8}{27,3 \times 24 \times 3600} \approx 1 \times 10^3 \text{ m/seg.}$$

$$a_{\text{Luna}} = \frac{v^2}{R} \simeq \frac{10^6}{3,84 \cdot 10^8} \simeq 0,26 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \approx 2,6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Este es el valor de la aceleración centrípeta que experimenta la Luna. Aquí no hemos usado las leyes de Newton, sólo geometría.

Siguiendo el esquema desarrollado por Newton, suponemos que la atracción gravitacional entre dos cuerpos, disminuye proporcionalmente al inverso del cuadrado de la distancia entre ellos. Newton se inspiró en el decaimiento observado en la intensidad de la luz a medida que se propaga, para enunciar esta ley.

Comparemos la aceleración centrípeta  $a_c$  calculada anteriormente, con la aceleración gravitacional que debe experimentar la Luna, si la ley que rige su decaimiento –propuesta en el párrafo anterior– es correcta.

Si denominamos  $g_{\oplus} \equiv$  aceleración gravitacional en la superficie de la Tierra debido a su propia masa, y  $a_{\text{L}} \equiv$  aceleración gravitacional ejercida sobre un objeto ubicado en la posición de la Luna originada por nuestro planeta, tenemos:

$$a_L \propto \frac{K}{R_{L-T}^2}, \quad g_{\oplus} \propto \frac{K'}{R_{\oplus}^2}.$$

Suponiendo que la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra está gobernada por la misma ley que desvía a la Luna de su trayectoria rectilínea, entonces, la constante de proporcionalidad en ambos casos debe ser la misma:  $K = K'$ . De aquí encontramos la razón entre estos dos números:

$$\frac{g_{\oplus}}{a_L} = \frac{R_{L-T}^2}{R_{\oplus}^2},$$

tomando  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , obtenemos:

$$a_L = \left( \frac{R_{\oplus}}{R_{L-T}} \right)^2 g_{\oplus} \simeq 2,7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Dentro de las aproximaciones hechas, esta aceleración es similar a la encontrada anteriormente, donde sólo usamos cinemática. Podemos concluir que la proposición acerca del comportamiento de la fuerza gravitacional actuando sobre la Luna, no contradice abiertamente los datos observacionales.

En rigor, al resolver el problema usando las leyes de Newton es necesario hacer varias correcciones. Una de ellas es que el sistema Tierra–Luna *gira en torno a su centro de masa* y no con respecto al centro de la Tierra, como supusimos al hacer el cálculo anterior. Lo que sucede es que la Tierra es mucho más masiva que la Luna, de modo que el centro de masa del sistema se ubica al interior de nuestro planeta.

### Ejercicio

Suponiendo que la Tierra y la Luna son dos esferas que permanecen en reposo, ubique la posición del centro de masa de este sistema.

#### VII.2.2. Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal de Newton, establece que la fuerza de atracción gravitacional entre dos masas puntuales  $m$  y  $M$ , está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}. \quad (\text{VII.1})$$

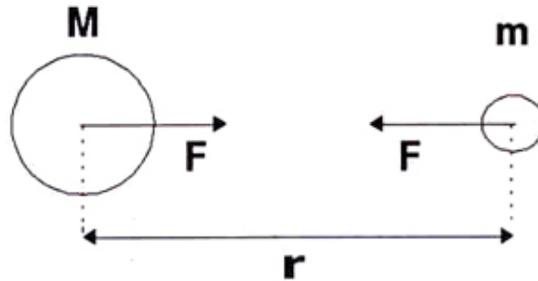


Figura VII.2: Suponemos que ambos cuerpos son partículas puntuales. La distancia  $r$  indica la separación entre los centros de las respectivas esferas.

El signo (-) indica que la fuerza entre las dos masas es atractiva,  $r$  es la distancia entre ellas y  $\hat{r}$  es el vector unitario que apunta desde el centro de uno de los cuerpos hacia el otro.  $G$  es la constante de gravitación universal y fue medida por Henry Cavendish usando una balanza de torsión.

El principio de acción y reacción es válido: la fuerza que ejerce  $M$  sobre  $m$  es la misma, en magnitud y dirección, pero tiene sentido opuesto a la fuerza que ejerce  $m$  sobre  $M$ .

Un esquema del aparato usado por Cavendish para medir  $G$ , se muestra en la Figura. Consiste en un péndulo de torsión con una barra unida a su extremo, la cual sostiene un par de masas iguales. Al acercar dos masas –cuyo valor es conocido– al extremo de la barra, ésta gira debido al torque generado por la atracción gravitacional que se produce sobre las esferas masivas instaladas en ella. Como esta rotación es muy pequeña, es necesario magnificarla; para ello se instala un espejo en el eje del péndulo de torsión, que refleja un haz de luz que se hace incidir sobre él, proyectándolo sobre una pantalla ubicada a cierta distancia. Un pequeño giro en la barra, produce una gran desviación de la imagen en la pantalla.

Dados los valores de las masas en el extremo de la barra, la distancia a la cual se aproximaron las masas externas y el ángulo de rotación del péndulo, se puede calcular el valor de  $G$ :

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ newton } m^2/kg^2 \quad (\text{VII.2})$$

Es interesante mencionar otros métodos usados para calcular el valor de  $G$ .

Un geofísico francés: P. Bouguer, en 1730, fue quien la determinó por primera vez, al notar una pequeña desviación en un plomo que colgaba de una cuerda muy larga en un precipicio en la cordillera de los Andes, en Ecuador. Bouguer supuso, correctamente, que este cambio de dirección se debía a la masa de la montaña y midió, bajo estas

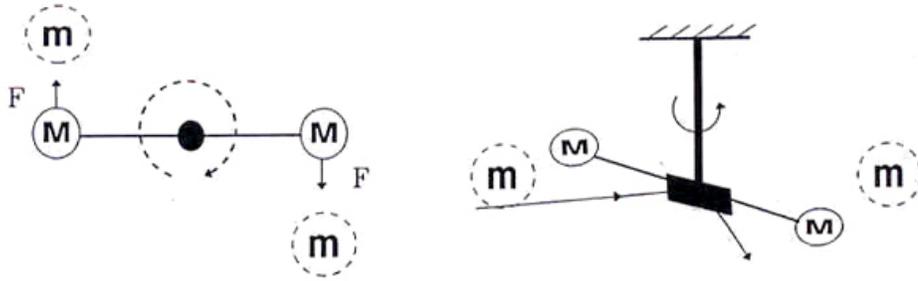


Figura VII.3: La Figura muestra el diseño del péndulo de torsión empleado por Cavendish para medir la constante de gravitación  $G$ . El espejo refleja un haz de luz incidente, que permite detectar pequeñas rotaciones de la barra.

condiciones, la constante  $G$ . Este fue el primer intento de una serie de experimentos posteriores realizados por la comunidad de geofísicos y que ha concluido con un valor para  $G$ , diferente al obtenido en el laboratorio usando instrumentos más sensibles que los utilizados por Cavendish en 1798.

Es interesante notar que transcurrieron más de cien años entre la publicación del libro *Principia* de Newton y la determinación del valor de  $G$  por Cavendish. Una posible explicación de este retraso, según K. E. Bullen (*The Earth's Density*, 1975, Chapman and Hall, London) se debió a un error aritmético de Newton, que lo hizo pensar que no se podía medir el valor de  $G$  en el laboratorio. Newton calculó el tiempo que demoraba un par de esferas de aproximadamente 30 cm. de diámetro en chocar, era de un mes, si inicialmente estaban a 7,5 cm. de distancia y la única fuerza que actuaba sobre ellas era la atracción gravitacional mutua. El valor correcto es de 330 segundos.

Conocido  $R_{\oplus}$  y la constante  $G$ , podemos determinar la masa de la Tierra incluyendo la fuerza gravitacional en la segunda ley de Newton:

$$m g = G \frac{M m}{R_{\oplus}^2} \Rightarrow M = \frac{g R_{\oplus}^2}{G}.$$

Insertando los valores numéricos de las cantidades indicadas, obtenemos:

$$M_{\oplus} \simeq 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

Con este valor podemos encontrar la *densidad media* de la Tierra:

$$\rho \simeq \frac{6 \times 10^{24}}{\frac{4\pi}{3} (6,4 \times 10^6)^3} \simeq 5,5 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

### VII.3. TEOREMAS DE NEWTON

Newton demostró, en dos teoremas, que *resulta correcto reemplazar un objeto masivo con simetría esférica por un punto, que concentra toda la masa de este objeto y que se ubica en su centro*. Esta posibilidad ha sido utilizada en los cálculos anteriores, cuando hemos reemplazado la Tierra –supuestamente una esfera perfecta–, por una masa puntual en su centro. Estos teoremas dan validez a los métodos utilizados en la resolución de los ejemplos anteriores.

Destaquemos que la posibilidad de reemplazar un cuerpo con simetría esférica por una masa puntual en su centro, se debe exclusivamente a que la fuerza depende del inverso del cuadrado de la distancia entre las partículas.

#### Teorema I

Un objeto, cualquiera sea su forma, que se ubique dentro de un cascarón esférico y homogéneo de materia, no experimenta ninguna fuerza gravitacional proveniente del cascarón.

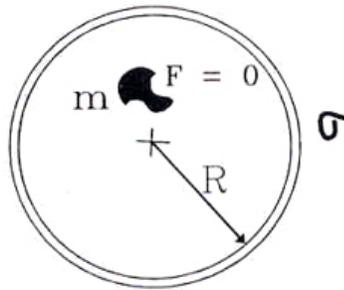


Figura VII.4:

#### Teorema II

La fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo que se ubica fuera de un cascarón esférico y homogéneo, de masa  $M$ , es la misma que experimentaría si toda la masa del cascarón se concentrara en el centro de la esfera.

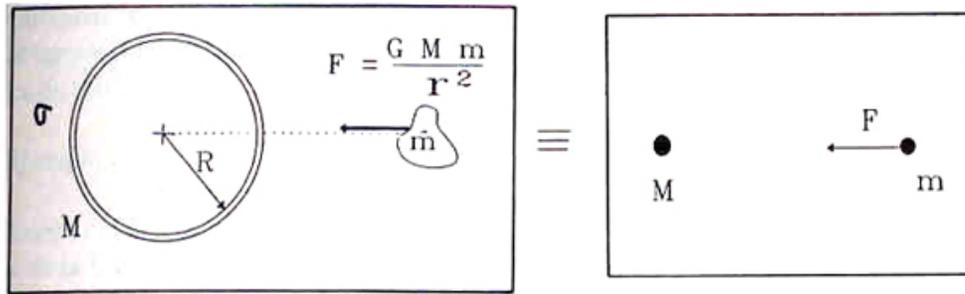


Figura VII.5:

**Demostración del Teorema I.**

Considere una partícula de masa  $m$  en un punto  $P$ , en cualquier lugar dentro de un cascarón esférico de materia. Suponga que tiene una densidad uniforme  $\sigma$ , y un espesor despreciable.

Se construye un cono, *muy angosto*, con vértice común  $P$ , que determina las áreas  $A_1$  y  $A_2$ , en su intersección con el cascarón. Las distancias desde  $P$  hasta el centro de  $A_1$  y  $A_2$  es  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. Como la apertura de los conos es infinitesimal, podemos dibujar una esfera de radio  $r_1$  que, aproximadamente, coincida con la superficie  $A_1$ . Mientras más pequeño sea el ángulo del vértice del cono, mejor es la aproximación. De esta forma, el área  $A_1$  es igual al *ángulo sólido*  $\Omega_1$  por el radio  $r_1$  al cuadrado. (Ver Apéndice Matemático, para conocer el origen de esta expresión del área). De aquí:

$$A_1 = \Omega_1 r_1^2, \quad \text{además la masa en esta área es: } \Delta M_1 = \sigma \Omega_1 r_1^2.$$

La fuerza gravitacional generada por este elemento  $\Delta M_1$ , sobre la masa  $m$ , ubicada en  $P$  es:

$$\Delta F_1 = \frac{G \Delta M_1 m}{r_1^2},$$

y está dirigida hacia el centro de  $A_1$ , a lo largo del eje del cono. Reemplazando la expresión para  $\Delta M_1$  definida anteriormente, obtenemos:

$$\Delta F_1 = \frac{G \sigma \Omega_1 r_1^2 m}{r_1^2} = G \sigma \Omega_1 m,$$

Podemos repetir el mismo argumento para calcular la fuerza que ejerce  $\Delta M_2$  sobre  $m$ . El resultado es:

$$\Delta F_2 = \frac{G \sigma \Omega_2 r_2^2 m}{r_2^2} = G \sigma \Omega_2 m,$$

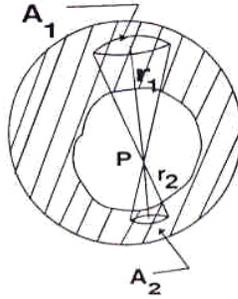


Figura VII.6: En la Figura se indican los conos geométricos utilizados en la demostración del Teorema I. Se supone que son infinitesimales, de manera que las aproximaciones tengan un error despreciable.

y apunta desde  $m$  hacia  $\Delta M_2$ .

Siendo uno de los conos la prolongación del otro, tienen el mismo ángulo sólido:  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

Ambas fuerzas  $\Delta F_1$  y  $\Delta F_2$ , tienen la misma dirección, pero sentidos opuestos. Como el cascarón es homogéneo, la densidad de masa  $\sigma$ , es constante e igual en todos los puntos, de modo que la fuerza neta sobre la masa  $m$ , se cancela:

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 = 0.$$

Además, como el punto  $P$  fue elegido arbitrariamente, este argumento es válido para cualquier posición dentro del cascarón esférico homogéneo.

Hasta aquí, sólo hemos demostrado que las fuerzas provenientes de un par de elementos infinitesimales de superficie del cascarón, elegidos de la forma especificada, *no* producen ninguna fuerza neta, sobre una masa puntual  $m$ , ubicada en el interior.

Para extender el resultado a toda la superficie, sólo debemos sumar el efecto de cada uno de los pares de conos infinitesimales hasta cubrir la esfera.

*Para generalizar este resultado a una esfera masiva o con un hueco en su interior, basta con sumar cascarones infinitesimales sobrepuestos, aumentando lentamente su radio.*

La condición que *no* podemos eliminar es la homogeneidad del cascarón:  $\sigma = \text{constante}$ , puesto que se destruye el equilibrio de las fuerzas.

Es conveniente destacar que este resultado se obtuvo debido a que la fuerza es proporcional a  $1/r^2$ . Una pequeña variación en la potencia de  $r$ , destruye este resultado. A su vez, esta característica permite verificar, mediante un experimento, la exactitud del valor de este exponente.

Con este comentario finalizamos la demostración que la fuerza gravitacional neta sobre una partícula ubicada al interior de un cascarón homogéneo es nula.  $\square$

No se incluye la prueba del segundo teorema. Aceptamos el resultado y lo usaremos más adelante. Se puede dar un argumento de plausibilidad: debido a la simetría esférica, la fuerza que experimenta una masa puntual frente a un cascarón, sólo puede tener una componente neta en la dirección del eje que une sus centros; las componentes perpendiculares a este eje, se anulan por simetría.

Ilustraremos este argumento resolviendo –como Ejemplo– el problema de una partícula frente a un anillo. No es difícil imaginar una esfera como una superposición de anillos de distinto radio.

### Ejemplo

Calcular la fuerza que se ejerce sobre la masa  $m$ , ubicada a una altura  $h$  en el eje del anillo de la Figura. El anillo tiene una densidad lineal de masa  $\lambda$  [kg/m], y un radio  $R$ .

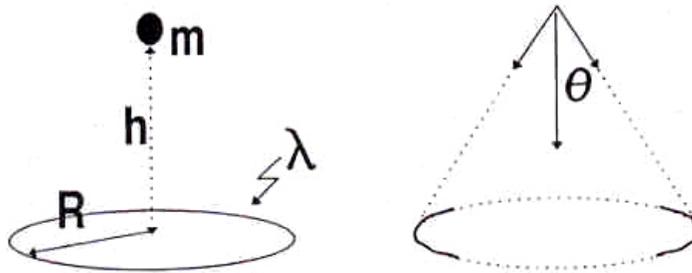


Figura VII.7: Al sumar las fuerzas generadas por segmentos opuestos del anillo, sobre la partícula  $m$ , se ve que sólo sobreviven sus componentes verticales.

Un elemento de arco del anillo se representa por  $[ds]$ , y la masa asociada es:  $\lambda [ds]$ . De acuerdo a la ley de gravitación universal, la fuerza que este segmento ejerce sobre  $m$  es:

$$\Delta \vec{F} = G \frac{\lambda [ds] m}{(R^2 + h^2)} \hat{r},$$

donde  $\hat{r}$ , representa el vector unitario cuya dirección es la línea que une ambas masas, apuntando hacia el segmento del anillo.

En la Figura se aprecia que al sumar las fuerzas generadas por elementos de arco diametralmente opuestos, sus componentes perpendiculares al eje se cancelan, y sólo contribuyen las proyecciones de las fuerzas paralelas a él.

El coseno del ángulo  $\varphi$ , que es la proyección del vector  $\hat{r}$  sobre el eje vertical, se expresa como:

$$\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Proyectando la fuerza de atracción de un segmento de arco sobre la masa  $m$ , en el eje vertical, se obtiene:

$$\Delta F_{\text{vertical}} = G \frac{\lambda [ds] m}{R^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Note que todas las cantidades que aparecen en la expresión de la fuerza vertical – aquella paralela al eje del anillo –, son constantes, de forma que sólo debemos sumar los segmentos del anillo para encontrar la fuerza total. Como:  $[ds] = R \Delta\varphi$ , entonces:

$$F = \sum_{n=1}^N F_n = \sum_{n=1}^N G \frac{\lambda [R \Delta\varphi] h m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = G \frac{\lambda R h m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n,$$

al recorrer todo el anillo,  $\sum \Delta\varphi_n = 2\pi$  radianes, de esta forma, el resultado es:

$$F_{\text{vertical}} = G \frac{\lambda R h m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} 2\pi = G \frac{M m h}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (\text{VII.3})$$

En la última igualdad reemplazamos  $\lambda 2\pi R$  por  $M$ .

Como la gravitación es atractiva, la fuerza sobre  $m$  apunta hacia el plano del anillo. Por el principio de acción y reacción, la misma fuerza se ejerce sobre el centro de masa del anillo, pero en sentido opuesto.

Si  $m$  se ubica en el centro del anillo, la fuerza neta es nula, por simetría. Este caso corresponde a imponer  $h = 0$  en la ecuación [VII.3].

### Ejemplo

Se tiene un cascarón esférico, de espesor despreciable, masa  $M$  y radio  $R$ . Calcule la fuerza que actúa sobre una masa puntual  $m$ , colocada a una altura  $h$ , sobre la esfera.

A partir de la expresión anterior, demuestre que en el límite  $h \ll R$ , esta fuerza es constante.

Usando el segundo teorema de Newton, sabemos que el valor de la fuerza en  $m$  es:

$$F_m = \frac{G M m}{(R + h)^2},$$

y apunta hacia el centro de la esfera. Sea  $\sigma_0$  la densidad superficial de masa del cascarón,  $\sigma \equiv [\text{masa}/\text{unidad de superficie}]$ :

$$\sigma_0 = \frac{M}{4\pi R^2},$$

reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$F_m = 4\pi \frac{G \sigma_0 m}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}.$$

Como  $h/R \ll 1$ , y recordando que:  $(1 + X)^{-2} = \{1 - 2X \pm \dots\}$ , si  $X \ll 1$ , entonces usando esta aproximación, la fuerza sobre la masa  $m$ , es:

$$F_m = 4\pi G \sigma_0 m \left[1 - 2 \frac{h}{R} \pm \dots\right], \quad (\text{VII.4})$$

como  $h/R \ll 1$ , no la consideramos en la expresión y, de este modo, la fuerza de gravedad en la vecindad exterior del cascarón es constante.  $\square$

El mismo argumento se puede usar para estimar la aceleración de gravedad sobre la Tierra. De acuerdo al segundo teorema de Newton, sabemos que no es posible distinguir una esfera homogénea y masiva, de un cascarón esférico con igual masa. Ambos ejercen la misma fuerza sobre una partícula *ubicada fuera de la esfera*.

Si  $h$  es la altura de un objeto en la cercanía de la superficie de la Tierra, por ejemplo  $h = 100$  m, es fácil darse cuenta que el término  $(h/R)$  es despreciable, considerando que el radio promedio de la Tierra es de  $R_{\oplus} \approx 6,4 \times 10^6$  m.

Si hacemos esta identificación, obtenemos:

$$F_m \equiv m g = 4\pi G m \sigma = \frac{G m M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2},$$

de aquí, la aceleración de gravedad  $g$ , es:

$$g \equiv \frac{G M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}. \quad (\text{VII.5})$$

Esta es la aproximación que empleamos al usar la aceleración de gravedad  $g$ , como una constante.

Es interesante comparar la fuerza de gravedad en la vecindad del cascarón esférico –es decir, con  $h/R \ll 1$ –, con la de un plano infinito, con la misma densidad superficial de masa  $\sigma$ .

Como la Tierra es *localmente plana*, podemos suponer que la fuerza gravitacional generada en su vecindad, es la correspondiente a un plano infinito. Esto resulta ser falso.

La atracción gravitacional de un plano infinito, es simétrica con respecto al plano: la misma en ambas caras. Esta simetría *no se cumple* en el cascarón esférico: en su interior no existe fuerza alguna de origen gravitacional.

Escribamos la expresión de la fuerza generada por un plano infinito sobre una masa puntual  $m$ :

$$g_{\text{plano infinito}} = 2\pi G \sigma_0, \quad (\text{VII.6})$$

este es la mitad del valor encontrado para un cascarón.

### Ejemplo

Se tiene un plano infinito, homogéneo – es decir, que tiene las mismas propiedades en todos sus puntos– y con densidad de masa  $\sigma_0$  [ $\text{kg}/\text{m}^2$ ]. Compruebe que la única cantidad, *con las dimensiones correctas*, que se puede formar con estos datos y que representa la fuerza de atracción gravitacional actuando sobre una masa  $m$ , es:  $G \sigma_0 m$ .

Es directo verificar las dimensiones de  $G \sigma_0 m$ . Esta expresión sólo se puede multiplicar por una cantidad adimensional. Este argumento es el único que ofrecemos para justificar la ecuación [VII.6].

Supongamos que una partícula se ubica a una altura  $h$  del plano infinito; en este caso, no hay forma de incluir esta altura en la fórmula de la fuerza de atracción gravitacional, sin alterar las dimensiones y por tanto arruinar la respuesta.

La diferencia entre el plano y la esfera, en este argumento dimensional, salta a la vista: en el cascarón debemos usar  $G$ ,  $\sigma_0$  y  $m$ , para tener las dimensiones correctas de fuerza gravitacional, pero además, es posible incluir la distancia  $h$ , a la cual se ubica la masa  $m$ , porque *existe otro parámetro extra*:  $R$ , que lo caracteriza. Con este radio, podemos formar cantidades adimensionales, específicamente, potencias de  $h/R$ , que es posible agregar a  $G \sigma_0 m$ , sin cambiar las dimensiones. Esto es lo que aparece en la fórmula [VII.4].

Otro argumento geométrico, para distinguir entre un plano infinito y el cascarón, se incluye en la Figura [VII.8].  $\square$

Para calcular la aceleración debida a un plano infinito necesitamos sumar (o integrar) los campos generados por una serie de anillos de radio  $R = 0$ , hasta  $R = \infty$ .

Un disco con  $\sigma = \text{constante}$ , se utiliza para modelar nuestra galaxia y calcular órbitas de estrellas que no se ubican en el plano galáctico.

El diámetro de la galaxia es de 150.000 años-luz y su espesor en la ubicación del Sol es de aproximadamente 1.500 años-luz. (1 año-luz  $\simeq 9 \times 10^{12}$  km).

### Ejemplo

Calcule, *aproximadamente*, la fuerza que experimenta una masa  $m_1$ , al interior de un cascarón de radio  $R$ , y densidad superficial  $\sigma_0$ , al cual le falta un pequeño disco de masa  $m$  en su superficie.

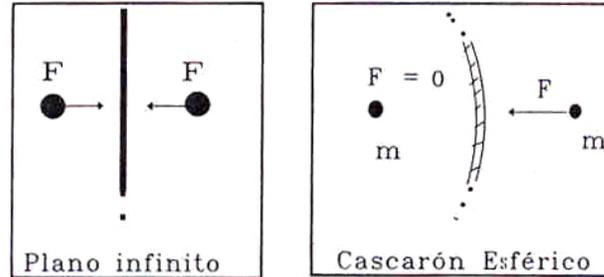


Figura VII.8: Al interior de la esfera, los elementos de masa del cascarón, atraen a la partícula de masa  $m$ , en la misma dirección pero en sentidos opuestos. Esto no ocurre en el plano infinito, donde la atracción gravitacional es la misma en ambas caras.

Estime, dentro de este esquema, la fuerza gravitacional que ejerce este cuerpo, sobre una masa ubicada en su exterior.

Al faltar un disco en la superficie del cascarón, se pierde la homogeneidad y los teoremas de Newton no son válidos. Una solución exacta de este problema, requiere matemáticas avanzadas. Nosotros sólo podemos emplear aproximaciones físicas, que describan el comportamiento de este sistema.

Para estimar la fuerza que afecta a la masa  $m_1$ , usaremos el principio de superposición. Al cascarón original, sin el disco, lo reemplazamos por uno completo –y por tanto homogéneo– más una masa puntual negativa –y por tanto imaginaria– ( $-m$ ), ubicada en el centro del lugar ocupado originalmente por el agujero del cascarón.

Para estimar la fuerza sobre una partícula  $m_1$ , respetando la aproximación señalada, sólo debemos utilizar la repulsión generada por la masa puntual imaginaria ( $-m$ ). (Recordemos que al interior de un cascarón homogéneo, no existen fuerzas gravitacionales).

En este caso, la fuerza repulsiva tiende a distanciar  $m_1$  de la región donde se ubica el orificio del cascarón.

Si la partícula de prueba  $m_1$ , se encuentra fuera del cascarón, la fuerza es la suma vectorial de la repulsión generada por ( $-m$ ), y la atracción del cascarón, considerado como un punto con masa,  $M = 4\pi R^2 \sigma_o$ , ubicado en el centro de la esfera.

En cuanto al error introducido por este método, depende del tamaño del disco: mientras más pequeño, mejor es la aproximación. El modelo planteado comienza a perder validez si nos acercamos a la masa  $-m_1$ .

### Ejercicio

En el ejemplo anterior, pruebe que la fuerza repulsiva que aleja a la masa  $m_1$  de la

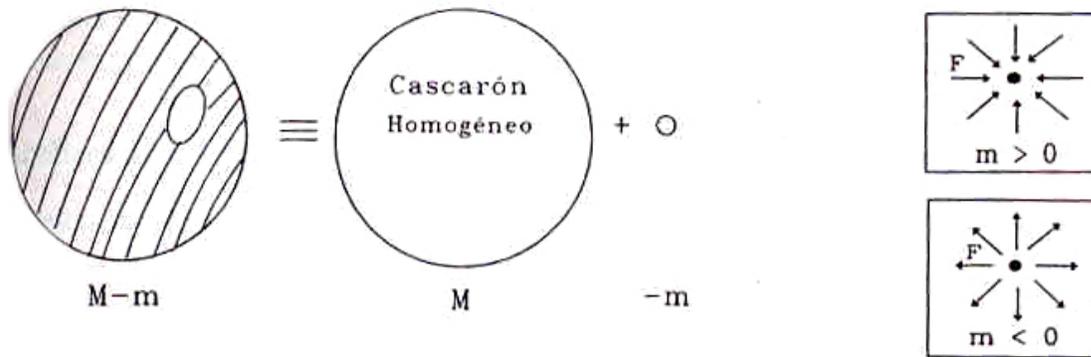


Figura VII.9: Superposición de una partícula de masa  $(-m)$  y un cascarón homogéneo. Esta configuración aproxima el caso de un cascarón al cual se le extrajo un pequeño disco de masa  $m$ .

ubicación del agujero circular, se puede también obtener utilizando el mismo argumento empleado en la demostración del Teorema I de Newton.  $\square$

#### VII.4. LEYES DE KEPLER

Kepler resumió en tres leyes, su trabajo de años acerca del movimiento de los planetas. Sus mediciones fueron realizadas en el observatorio de Tycho Brahe, el padre de la astronomía moderna. Cabe notar que no existían telescopios en esa época, sólo se utilizaba un instrumento con graduaciones angulares, con el objeto de registrar la posición relativa de los planetas en el transcurso del tiempo.

Dos de sus tres leyes, aparecen en su libro *A New Astronomy*, publicado en 1609. Constituyeron las primeras leyes naturales en el sentido que hoy le adjudicamos a ese término, es decir, sus conclusiones estaban basadas en una observación metódica del movimiento de los planetas y no, únicamente, en principios filosóficos sin una base observacional. Esta característica marca una diferencia con la tradición existente hasta ese tiempo, en cuanto al estudio de los objetos celestes.

Kepler también contribuyó al desarrollo de los instrumentos ópticos.

##### Leyes de Kepler:

1) El movimiento de un planeta es una elipse, en uno de cuyos focos está el Sol.

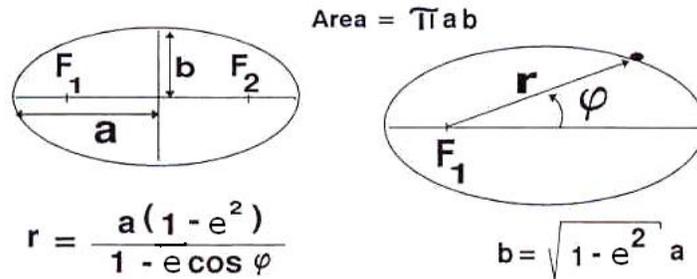


Figura VII.10: Identificación de los parámetros que aparecen en una órbita elíptica. La excentricidad  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  de una elipse. La excentricidad que aparece en la Figura es exagerada. Los planetas se mueven en órbitas cuya excentricidad es muy pequeña, son casi órbitas circulares.

2) La línea que conecta el Sol con el planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales.

3) Cuando la órbita del planeta es una circunferencia, se cumple que:

$$R^3 \omega^2 = G M_{\odot},$$

donde  $M_{\odot}$  es la masa del Sol; si la órbita es una elipse, su período es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G M_{\odot}}},$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse.

Note que en el caso de una órbita elíptica, el período  $T$  es constante, sin embargo su velocidad angular y tangencial es diferente en cada uno de sus puntos.

#### Satélites síncronos

Se denomina de esta forma a los satélites que permanecen a una altura fija, rotando con la misma velocidad angular de la Tierra, de esta forma, se mantienen constantemente en el cenit de un mismo punto geográfico.

Su objetivo es comunicar distintos puntos del planeta, transmitiendo señales desde un continente a otro. El satélite recibe una señal y la retransmite a las estaciones en

Tierra. Este medio reemplaza a las estaciones retransmisoras, como las que utilizan en Chile los canales de televisión para llegar a las regiones.

### Ejemplo

Encontrar la altura a la cual es necesario dejar en órbita un satélite para que gire con la velocidad angular de la Tierra.

Este problema es una aplicación directa de la tercera ley de Kepler, ubicando la Tierra en el centro de la circunferencia y el satélite en el lugar del planeta. Sin embargo, hemos escogido un camino más largo para llegar a ese resultado, con el objeto de repasar algunos detalles del movimiento bajo fuerzas centrales.

Comenzamos fijando un sistema de referencia inercial, de modo que la Tierra gire con respecto él, con una velocidad angular de [una vuelta/día]. Este debe ser el mismo valor con el cual, por definición, debe girar el satélite síncrono:

$$v_{sat} = \frac{2\pi R}{T},$$

donde  $T = 24$  horas, es el periodo de la órbita y  $R$ , es su radio, cuyo valor debemos encontrar. La aceleración es:

$$a_{centrípeta} = \frac{v^2}{R}, \implies a_{centrípeta} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Recordemos que la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia, al igual que la fuerza de atracción gravitacional:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \implies \frac{-GMm}{R^2} \hat{r} = -m \frac{v^2}{R} \hat{r}. \quad (\text{VII.7})$$

Para hacer más fáciles los cálculos, recordemos la ecuación [VII.5]:

$$g \equiv \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 9,8 \text{ m/seg}^2. \quad (\text{VII.8})$$

Reemplazando esta última expresión en la fórmula [VII.7]:

$$\frac{GM_{\oplus}}{R^2} \left( \frac{R_{\oplus}^2}{R_{\oplus}^2} \right) = \omega^2 \cdot R,$$

donde  $\omega$ , es la velocidad angular del satélite síncrono. Incorporando la expresión para  $g$ , de la ecuación [VII.8], tenemos:

$$g \left( \frac{R_{\oplus}}{R} \right)^2 = \omega^2 R,$$

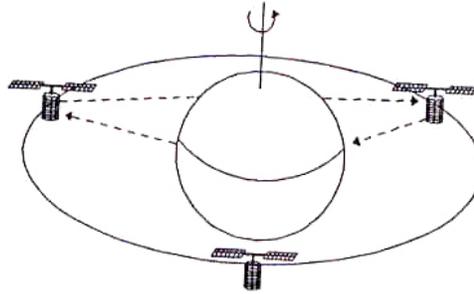


Figura VII.11: Con tres satélites síncronos es posible comunicar dos puntos geográficos ubicados arbitrariamente sobre la superficie de la Tierra.

de esta forma, recuperamos la *tercera ley de Kepler*, en la forma anticipada al comienzo:

$$R^3 \cdot \omega^2 = g R_{\oplus}^2 = G M_{\oplus} \implies R^3 \omega^2 = G M_{\oplus}. \quad (\text{VII.9})$$

En esta ecuación supusimos, correctamente, que la masa del satélite es muy pequeña comparada con la masa de la Tierra. Si esto no fuera así, aparecería un  $(M_{\oplus} + m_{sat})$ , en lugar de  $M_{\oplus}$ , en la ecuación [VII.9].

Hasta aquí sólo hemos recuperado la tercera ley de Kepler. El método elegido nos permitió demostrar que las leyes de Kepler, están en perfecta armonía con las de Newton, incluyendo su ley de gravitación universal.

Calculemos ahora el valor del radio de la órbita del satélite.

$$R^3 = \frac{G M_{\oplus}}{\omega^2} = g \left( \frac{R_{\oplus}}{\omega} \right)^2,$$

introduciendo valores numéricos, obtenemos:

$$R \simeq 4,2 \times 10^7 m = 4,2 \times 10^4 km. \quad (\text{VII.10})$$

Restándole a esta cantidad, el radio de la Tierra, obtendremos la altura  $h$  a la que se encuentra el satélite:

$$h \simeq 42,000 - 6,000 = 36,000 \text{ km}. \quad (\text{VII.11})$$

La ionósfera es una de las capas que componen la atmósfera. Su altura es  $h_{ionósfera} \simeq 300 km$ . En ella se reflejan las ondas de radio, permitiendo así comunicarse a los radioaficionados en distintos puntos de la Tierra. Desgraciadamente, para frecuencias más altas, que corresponden a las ondas de TV, entre otras, esta capa es transparente –las deja pasar, sin reflejarlas– por esta razón, estos medios deben usar los satélites

geoestacionarios o síncronos como los hemos llamado, para transmitir información entre dos puntos muy alejados.

### Ejercicio

Encuentre la expresión para la tercera ley de Kepler, suponiendo que la Luna y la Tierra son cuerpos puntuales y que describen una circunferencia en torno al centro de masa del sistema Tierra–Luna.

**Indicación:** Suponga que la Tierra se encuentra a una distancia  $R_T$  del centro de masa (CM). Análogamente, la distancia entre la Luna y el CM, es  $R_L$ , de forma que  $R_L + R_T = \ell$ .

Las ecuaciones de movimiento para ambos cuerpos son:

$$G M_L / \ell^2 = \omega^2 R_T; \quad G M_{\oplus} / \ell^2 = \omega^2 R_L,$$

de aquí se obtiene:  $G(M_{\oplus} + M_L) = \omega^2 \ell^3$ . donde  $\ell \equiv$  Distancia Tierra–Luna.

## VII.5. MOMENTO ANGULAR

Dos partículas que interactúan gravitacionalmente, no pueden generar torque, puesto que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \left[ -\frac{G M_{\odot} m}{r^2} \hat{r} \right], \implies \tau = 0.$$

En esta expresión, ubicamos el origen de coordenadas en una de las partículas. En la segunda igualdad reemplazamos  $\vec{F}$  por la fuerza gravitatoria. Como esta fuerza apunta en la misma dirección del vector posición,  $\vec{r}$ , se concluye que el torque es nulo:  $\vec{\tau} = 0$ .

Si  $\vec{\tau} = 0$ , sabemos que el momento angular se conserva. Esta característica de las fuerzas gravitacionales fue descubierta, empíricamente, por Kepler cuando, a partir de sus observaciones, concluyó que el vector posición de los planetas *barría áreas iguales en tiempos iguales* a lo largo de su trayectoria alrededor del Sol. Esto sucedió mucho antes que Newton anunciara su ley de gravitación universal.

Veamos cómo esta propiedad se deduce de la conservación del momento angular.

Fuerzas Centrales $\implies  \vec{L}  = \text{Constante} \equiv$ Segunda Ley de Kepler.	(VII.12)
---	----------

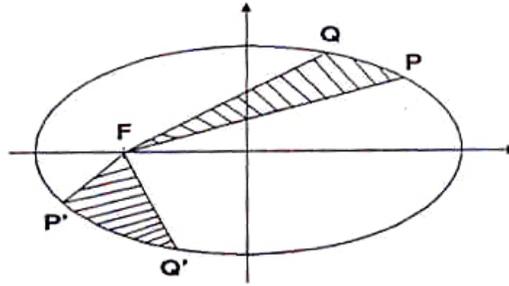


Figura VII.12: Órbita de un cuerpo alrededor de otro considerablemente más masivo. Se indica el área barrida por el vector de posición del cuerpo más liviano en dos instantes cercanos de su trayectoria.

El área del triángulo FPQ de la Figura es:

$$\Delta FPQ = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{PQ}|,$$

aproximando la cuerda PQ, por su arco:

$$\Delta FPQ = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} \cdot \Delta t|,$$

como  $\Delta t$  es un número:

$$\frac{\Delta t}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}|.$$

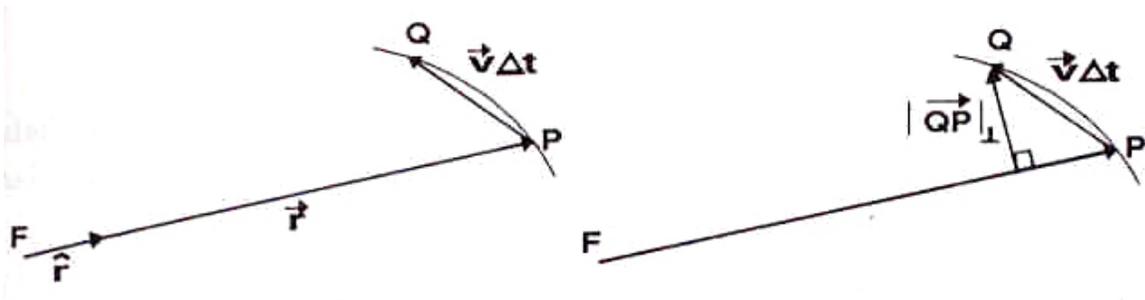


Figura VII.13: Triángulo usado en la demostración de la proporcionalidad entre el momento angular y el área barrida por el vector posición del objeto en órbita.

Recordemos que:  $|\vec{r} \wedge \vec{PQ}| = |\vec{r}| |\vec{PQ}| \text{sen} \theta = |\vec{r}| |\vec{PQ}_\perp|.$

Esta expresión es válida en cualquier instante, puesto que hemos usado *sólo geometría* para obtenerla. El mismo razonamiento se repite para el triángulo  $\Delta FP'Q'$ , de la Figura anterior:

$$\Delta FP'Q' = \frac{1}{2} |\vec{r}' \wedge \vec{P'Q}'| = \frac{1}{2} r' | \vec{P'Q}' |_{\perp},$$

Por otra parte, la definición de momento angular  $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$ , se puede escribir como:

$$\vec{L} \cdot \Delta t = m \vec{r} \wedge \vec{v} \Delta t = m [\vec{r} \wedge \vec{v} \Delta t] = \text{Constante} \cdot \Delta t.$$

En la última igualdad usamos el hecho que el momento angular se conserva.

De esta forma, al tomar dos puntos cualquiera  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , en la trayectoria de un planeta alrededor del Sol y elegir un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , igual para ambos, obtenemos:

$$m |\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1| = m |\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2|,$$

por conservación del momento angular. Multiplicando ambos lados por  $\Delta t$ , obtenemos:

$$|\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1| \Delta t = |\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2| \Delta t.$$

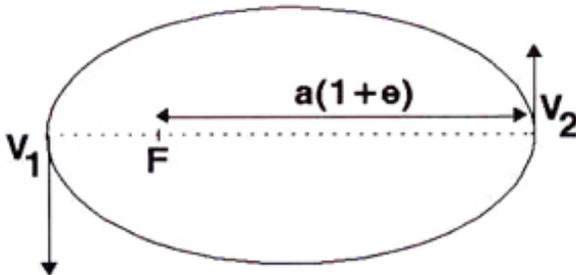
Ya demostramos que esta última expresión, es proporcional al área barrida por el planeta en distintos puntos de su órbita, en intervalos iguales de tiempo, luego:

$$2 \times \text{Area}_1 = 2 \times \text{Area}_2.$$

El área barrida por el planeta en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , es la misma en cualquier par de puntos de su órbita.

### Ejercicio

Encuentre la razón entre las velocidades de un cometa en el afelio y perihelio de su órbita. La elipse tiene como uno de sus focos al sol y el valor de su excentricidad es  $e$ .



**Ejemplo**

Se perfora un túnel a través de la Tierra –supuesta como una esfera homogénea–, en la forma indicada en la Figura. Demuestre que si dejamos caer una partícula en este túnel, partiendo del reposo, el movimiento resultante corresponde al de un oscilador armónico. Verifique que su periodo es el mismo que aquel de una partícula que cruza la Tierra a través de un diámetro o de una nave que circunda la Tierra a muy baja altura.

Explique cuantitativamente, porqué no se toma en consideración la rotación de la Tierra.

De acuerdo al segundo teorema de Newton, sólo la esfera masiva ubicada al *interior* de la posición de la partícula –en cada instante–, actúa gravitacionalmente sobre ella.

La fuerza de atracción gravitacional, *proyectada* a lo largo de la dirección del túnel, en cualquier instante y posición es:

$$-\hat{x} \cdot \vec{F} = \frac{G M(x)m}{(h^2 + x^2)} \cos \phi, \quad \text{con} \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

$M(x)$ , es la masa de la Tierra contenida dentro de la esfera, con centro en  $O'$ , que pasa por el punto señalado por la coordenada  $x$ . El ángulo  $\phi$  varía con la coordenada  $x$ .

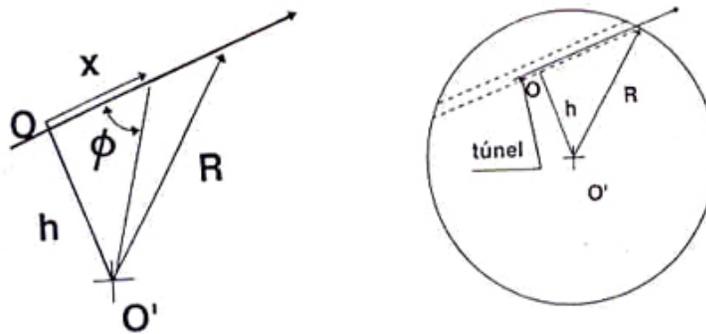


Figura VII.14: Túnel a través de la Tierra. Se incluye el diagrama utilizado para calcular el valor de  $x$  y  $\cos \phi$ . La fuerza gravitacional apunta siempre hacia el centro  $O'$ , de la esfera.

Designamos  $a_x$ , como la aceleración de la partícula en la dirección  $x$  indicada en la Figura. La segunda ley de Newton proyectada en la dirección  $\hat{x}$ , es:

$$m a_x = -\frac{G M(x)m}{h^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Suponemos que no existe roce en las paredes del túnel. La masa  $M(x)$ , en la esfera centrada en  $O$  y al interior de  $x$  es:

$$M(x) = \frac{4\pi}{3} \rho_o G(x^2 + h^2)^{3/2},$$

donde hemos supuesto que la Tierra es una esfera de densidad uniforme  $\rho_o$ . Simplificando obtenemos:

$$a_x = -\frac{4\pi G}{3} \rho_o x,$$

que es precisamente la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple, a partir de la cual, obtenemos la velocidad angular que adquiere la masa  $m$  en su recorrido dentro del túnel:

$$\omega^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho_o.$$

Esta es la misma frecuencia que tiene una partícula que atraviesa *diametralmente* la Tierra. Si planteamos la ecuación de movimiento radial para este nuevo caso, obtenemos:

$$m a_r = -\frac{G M(r) m}{r^2}, \quad \text{con } M(r) = \frac{4\pi G}{3} \rho_o r^3,$$

de esta forma, la aceleración, es:

$$a_r = -\left(G \frac{4\pi}{3} \rho_o\right) r,$$

que corresponde a un movimiento armónico simple, con la misma frecuencia angular del caso anterior.

Obviamente la velocidad máxima es mayor en esta situación, porque la amplitud es igual al radio de la Tierra y  $v_{\max} = \omega R$ .

Este resultado también coincide con el periodo de una nave que circunda la Tierra a una altura despreciable. En este caso:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G M}{R^2}, \quad \text{como } v = \omega R,$$

$$\omega^2 = \frac{G M}{R^3} = \frac{4\pi}{3} G \rho_o.$$

Que el periodo  $T$  sea proporcional al producto  $G \rho$  para estos tres casos, no es sorprendente. Es la única cantidad que tiene dimensiones de tiempo (¡compruébelo!), y en las cuales intervienen la estrella, a través de su masa  $M$  y el radio  $R$ , combinados para

escribirlo como  $\rho$ ; y el otro agente es  $G$ , que señala la presencia de la gravitación. Lo que desconcierta es que el factor adimensional en frente de esta cantidad:  $4\pi/3$ , sea el mismo en todos los casos y no incluya términos como  $h/R$ , por ejemplo.

Sin embargo, después de volver a meditarlo, la sorpresa se esfuma y sospechamos que esta propiedad se debe a las simplificaciones impuestas, entre las cuales están: estrella con densidad constante, no hay atmósfera y por lo tanto no hay roce del aire, y tampoco se incluyó la velocidad angular de la Tierra. Esta última, hace una diferencia obvia: no es lo mismo cavar este túnel imaginario a través del eje Polar, que en dirección perpendicular a él. A continuación, veremos que la magnitud de esta corrección es despreciable.

¿De qué magnitud es el error cometido al no incluir la rotación de la Tierra en la ecuación de movimiento de la partícula?

Para responder esta pregunta, incluyamos la rotación en sus ecuaciones originales, para ver como se afecta el movimiento.

Resolvamos el caso de un túnel que cruza diametralmente la Tierra, a través del Ecuador.

La ecuación radial es:

$$m a'_r = -\frac{G M(r) m}{r^2}, \quad \text{con} \quad a'_r = a_r - \omega_{\oplus}^2 r,$$

donde hemos incluido la rotación de la Tierra a través de la aceleración centrípeta  $\omega_{\oplus}^2 r$ , que experimenta la partícula al ser arrastrada por las paredes del túnel. Despejando  $a_r$ :

$$a_r = \omega_{\oplus}^2 r - \frac{G M(r)}{r^2} = \left( \omega_{\oplus}^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho_o \right) r.$$

Estimemos ahora el valor relativo de cada uno de los términos que aparecen a la derecha de la ecuación anterior:

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \simeq 8 \times 10^{-5} \Rightarrow \omega_{\oplus}^2 \approx 6,4 \times 10^{-9}.$$

Por otra parte,

$$\frac{4\pi}{3} G \rho_o \simeq 1,5 \times 10^{-6}.$$

Este último término es aproximadamente mil veces mayor que la modificación introducida por la rotación de la Tierra, que resultó ser proporcional a  $\omega_{\oplus}^2$ .

## VII.6. ENERGIA EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Para trasladar una partícula de masa  $m$  entre dos posiciones arbitrarias, en presencia de un cuerpo masivo  $M$ , debemos realizar un trabajo. Una característica del campo gravitacional es que este trabajo *no depende del camino elegido*, sino solamente del punto final e inicial de la trayectoria.

En estos casos es posible definir una función que se denomina la *energía potencial*,  $V(P)$ , que representa el trabajo necesario para trasladar una partícula de prueba desde el infinito hasta un punto  $P$  cualquiera. Esta función es unívoca: a cada punto del espacio le asocia un sólo valor y además no experimenta cambios bruscos de valor a medida que nos desplazamos en el espacio.

Esta propiedad de las fuerzas gravitacionales, es compartida por otros modelos estudiados anteriormente: el oscilador armónico, el campo gravitacional  $g$ , en la vecindad de la superficie terrestre,...etc.

### VII.6.1. Trabajo

Para calcular el trabajo, debemos multiplicar la fuerza aplicada por el desplazamiento realizado. Trasladar un cuerpo lentamente entre dos puntos arbitrarios, significa moverlo en forma tal, que casi se encuentra en reposo en cada uno de los puntos de la trayectoria. Para que así ocurra, es necesario aplicar una fuerza que –en este caso– cancele la atracción gravitacional.

#### Trabajo en un desplazamiento radial

Hagamos una simplificación adicional: calculemos el trabajo necesario para trasladar una masa puntual, *radialmente* entre los puntos A y B de la Figura [VII.15]. Con el objeto de mantener el equilibrio en cada punto de la trayectoria, necesitamos aplicar una fuerza externa igual y en sentido opuesto a la atracción gravitacional. La fuerza aplicada apunta radialmente, alejándose de la masa  $M$ .

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}.$$

La expresión para el trabajo realizado por esta fuerza externa es:

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = \sum_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r_i^2} \Delta r_i.$$

El trabajo se reduce al producto de las dos cantidades, puesto que ambos apuntan en la misma dirección y sentido:  $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = F \Delta r_i$ . Para evaluar la sumatoria tomamos

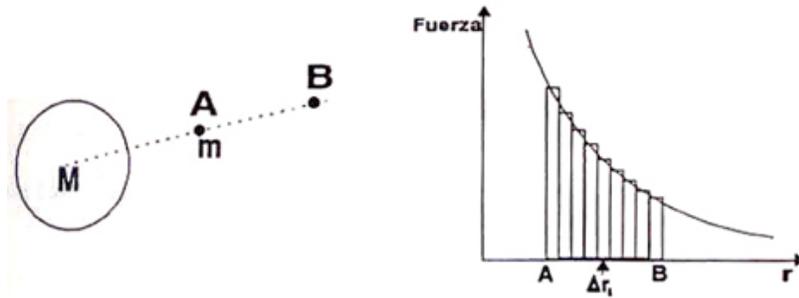


Figura VII.15: El trabajo realizado se reduce a calcular el área bajo la curva entre el punto final e inicial del traslado. Para ello se aproximan los elementos de área a trapecios, como se ha hecho anteriormente.

intervalos  $\Delta r_i$ , iguales para todo  $i$ , y los designamos como  $\Delta$ . El método geométrico usado anteriormente para evaluar esta sumatoria, consiste en calcular el área encerrada bajo la curva  $F(r)$ , entre A y B, donde esta función representa el valor de la fuerza en cada punto de la trayectoria radial.

Aproximamos el área bajo un elemento de curva, mediante un trapecio infinitesimal, como se indica en la Figura [VII.15].

En los cálculos que siguen, temporalmente, nos olvidamos del factor  $GMm$  que aparece en la fuerza gravitatoria, con el objeto de acortar las expresiones usadas. Al final, multiplicamos el resultado por esta expresión, para tener las dimensiones correctas.

Como el área del trapecio es el producto de la semisuma de las bases por la altura, y la fuerza es proporcional a  $1/r^2$ , tenemos que:

$$\text{Área del Trapecio } i\text{-ésimo} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) \Delta = \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{2 r_i^2 r_{i+1}^2} \Delta, \quad (\text{VII.13})$$

pero, como  $r_{i+1} \equiv \Delta + r_i$ , entonces:

$$\text{Área del Trapecio } i\text{-ésimo} = \frac{2r_i^2 + 2r_i\Delta + \Delta^2}{2r_i^2 r_{i+1}^2} \cdot \Delta.$$

Como la estrategia usual es hacer  $\Delta$  lo más pequeño posible ( $\Delta \rightarrow 0$ ), despreciamos la potencia más alta en  $\Delta$ , que aparece en el numerador. Se puede mostrar que este término complica los cálculos intermedios y desaparece, después de tomar el límite señalado. Con esta simplificación, tenemos que:

$$\text{Área del Trapecio } i\text{-ésimo} \simeq \frac{r_i[r_i + \Delta]}{r_i^2 r_{i+1}^2} \cdot \Delta = \frac{r_i r_{i+1}}{r_i^2 r_{i+1}^2} \cdot \Delta = \frac{1}{r_i r_{i+1}} \cdot \Delta,$$

y finalmente reemplazando,  $\Delta = [r_{i+1} - r_i]$ , obtenemos:

$$\text{Area del Trapecio } i\text{-ésimo} = \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right] \quad (\text{VII.14})$$

El trabajo corresponde a la suma de esta expresión entre A y B, multiplicada por la constante,  $GMm$ :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \sum_{i=1}^N GMm \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right] \\ &= GMm \left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N} \right) \right]. \end{aligned}$$

Al sumar estos términos, se aprecia que se anulan de a pares, sobreviviendo sólo el primero y el último. El resultado es:

$$W_{A \rightarrow B} = GMm \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (\text{VII.15})$$

Este es el trabajo necesario para desplazar muy lentamente una masa  $m$  desde  $r_A$  hasta  $r_B$  contra la atracción gravitacional de la masa  $M$ .

Se identificó  $i = 1$  con A, y B con  $i = N$ .

### Trabajo en un desplazamiento arbitrario

Ahora estamos en condiciones de generalizar esta expresión considerando un desplazamiento arbitrario.

Existen tres puntos relevantes en este cálculo: la masa  $M$ , que por el teorema II de Newton, podemos considerar como una masa puntual y los puntos extremos del trayecto: A y B. Con estos tres puntos podemos generar un plano, y de esta manera vamos a considerar sólo trayectorias planas, de la forma que se indica en la Figura [VII.16].

El *producto escalar* entre el vector desplazamiento y la fuerza, que aparece en la definición de trabajo, está proyectando el desplazamiento en la dirección de la fuerza. De esta forma, sólo su componente en esa dirección contribuye al trabajo. Conviene, entonces, descomponer la trayectoria en una suma de segmentos radiales y arcos de circunferencia, indicados en la Figura [VII.16]. Únicamente los segmentos radiales dan

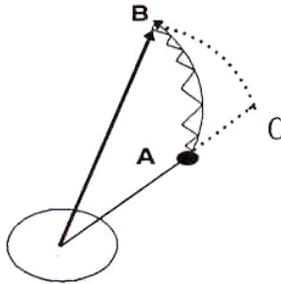


Figura VII.16: En esta trayectoria arbitraria nos desplazamos desde el punto A hasta B realizando una sucesión de movimientos radiales y a lo largo de un elemento de circunferencia. El resultado final es que sólo el desplazamiento radial genera trabajo.

una contribución distinta de cero. Los arcos son ortogonales a la fuerza –en cada uno de sus puntos– y, en consecuencia, el producto escalar con dicho desplazamiento, desaparece.

Resumiendo: como el trabajo se realiza contra la fuerza gravitacional, sólo contribuyen los desplazamientos *paralelos a ella*. Aquellos ortogonales, es decir, a lo largo del arco de circunferencia, no aportan a la suma total.

Evaluemos el trabajo para trasladar la masa  $m$ , desde A hasta B, de acuerdo a la Figura [VII.16]:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + 0.$$

Geoméricamente podemos convencernos que la trayectoria punteada de A a B, es equivalente a la línea llena: cada arco de circunferencia infinitesimal se puede trasladar al que une C con B, y en forma análoga, la distancia radial de los triángulos infinitesimales de A a B, se reproduce en la línea punteada de A hasta C. Como la fuerza es radial y depende sólo de  $r$ , el trabajo evaluado en una u otra trayectoria arroja el mismo resultado.

Usando la trayectoria punteada –por ser más conveniente para calcular–, obtenemos el trabajo efectuado entre A y B:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} &= G M m \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_C} \right), \\ \Rightarrow W_{A \rightarrow B} &= G M m \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

En este último paso usamos que  $r_B$  y  $r_C$ , están ubicados en un arco de circunferencia.

Concluimos que la primera expresión encontrada para el trabajo, usando desplazamientos radiales, es general: incluye a cualquier trayectoria independiente de su forma.

En un desplazamiento tridimensional el argumento es similar: debemos considerar esferas en lugar de circunferencias y la contribución al trabajo proviene solamente de los saltos desde una esfera a la siguiente.

El trabajo realizado por un agente externo para transportar, lentamente, un cuerpo a través del campo gravitacional generado por una masa  $M$ , sólo depende de la posición inicial y final de este recorrido. Es independiente de la trayectoria elegida para unir ambos puntos.

### Ejemplo

Calcule el trabajo necesario para armar un cuadrado de lado  $a$ , con masas puntuales  $m$ , en cada uno de sus vértices.

Suponemos que las masas puntuales que conformarán el cuadrado, se ubican inicialmente en el infinito y a distancias muy alejadas entre ellas, de forma que las fuerzas gravitacionales entre ellas sea despreciable. De este modo, sólo debemos considerar las masas que ya están en el cuadrado para calcular el trabajo necesario para incorporar la siguiente partícula.

Esta es una propiedad que tienen las fuerzas que decaen de la misma forma o más rápidamente que el cuadrado del inverso de la distancia. Debe cumplirse, además, que el cuerpo por armar tenga su masa distribuida en un volumen finito. Concretamente, el procedimiento que utilizaremos aquí, no es válido si se trata de un alambre, cilindro o un plano infinito.

De acuerdo a la discusión anterior, el trabajo para traer la primera masa al vértice del cuadrado es nulo, puesto que previamente no hay ninguna masa.

Para incorporar la segunda es preciso realizar un trabajo para acercarla desde el infinito hasta una distancia  $a$  de la primera:

$$W_2 = G m m \left[ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{a} \right] = -G m^2 \left[ \frac{1}{a} \right],$$

es negativo, puesto que la fuerza que evita que la segunda partícula se acelere hacia la primera, apunta en dirección contraria al desplazamiento realizado en cada paso.

Para traer la tercera masa, debemos realizar el mismo trabajo, pero considerando el efecto de las dos primeras masas ya instaladas:

$$W_3 = -G m^2 \left[ \frac{1}{a} \right] - G m^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2} a} \right],$$

el factor  $\sqrt{2}$ , que aparece en el segundo término, proviene de la distancia que separa a las partículas en vértices opuestos.

Finalmente el trabajo correspondiente al traslado de la última masa del conjunto, es:

$$W_4 = -Gm^2 \left[ \frac{1}{a} \right] - Gm^2 \left[ \frac{1}{a} \right] - Gm^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}a} \right],$$

donde cada término proviene del trabajo asociado a una de las masas previamente instaladas.

El trabajo total es la suma de cada uno de estos términos:

$$W_{\text{Total}} = -4Gm^2 \left[ \frac{1}{a} \right] - 2Gm^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}a} \right] = -(4 - \sqrt{2})Gm^2 \left[ \frac{1}{a} \right].$$

El signo (-) que aparece en frente de toda la expresión, indica que el sistema está *ligado*, es decir, es necesario realizar un trabajo extra (positivo) para desarmarlo.

Podemos hacer un gráfico de  $W_{\text{Total}}$  versus  $a$ , el tamaño de la red (ver Figura). Su interpretación es la siguiente: la flecha vertical que une la curva con la abcisa –que señala el nivel de energía cero–, es el trabajo necesario para desarmar la estructura. Vemos que mientras más cercana se ubican las partículas, mayor es la energía (o el trabajo) que debemos realizar para separarlo.

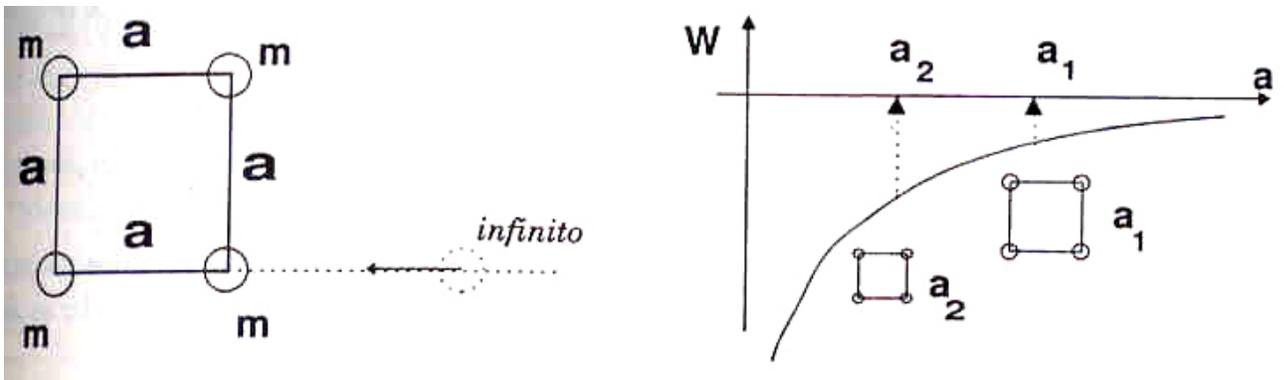


Figura VII.17: Se dibuja la estructura y la forma como se traen las masas. A la derecha aparece el trabajo necesario para armar el cuadrado versus el tamaño de la red, suponiendo que se arman cuadrados similares.

Finalmente, conviene destacar la facilidad de cálculo que proporciona el uso de la definición de trabajo por ser una cantidad escalar y depender, únicamente, de la posición y no del trayecto seguido por las partículas. □

### Ejemplo

Calcule el *trabajo mínimo* que se precisa para trasladar una roca de masa  $m_1$ , desde la superficie de la Tierra hasta la Luna. Suponga que la distancia que las separa (centro a centro) es  $D$ , y que los radios respectivos son  $R_T$  y  $R_L$ .

Hasta ahora hemos calculado el trabajo para desplazar un objeto, lentamente, no es posible entonces incorporar aquí el movimiento relativo de la Luna con respecto a la Tierra. En esta aproximación, las supondremos estáticas.

El trabajo para trasladar la roca una distancia  $D$ , se calcula usando el principio de superposición: primero consideramos el efecto de la Tierra sola y posteriormente el correspondiente debido a la Luna.

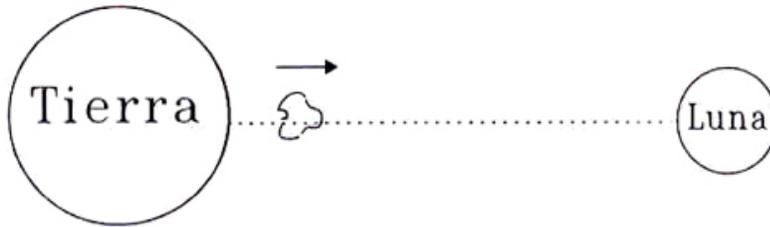


Figura VII.18: La Tierra y la Luna se suponen en reposo. La roca se traslada en línea recta entre ambos cuerpos.  $D$  es la distancia que separa los centros de ambos cuerpos.

El trabajo que debemos efectuar para alejarla de la atracción de la Tierra, de acuerdo a la ecuación [VII.16], es:

$$W_{Tierra} = G M_T m_1 \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{D - R_L} \right).$$

Diferente es el caso de la Luna atrayendo a la roca: al desplazarla debemos *sostener* la roca para que no se acelere, es necesario aplicar la fuerza en sentido opuesto al desplazamiento. El trabajo es:

$$W_{Luna} = G M_L m_1 \left( \frac{1}{D - R_T} - \frac{1}{R_L} \right),$$

donde nos olvidamos –de acuerdo al principio de superposición– de la existencia de la Tierra y consideramos la Luna como el único objeto gravitante.

El resultado final es la suma de ambos procesos:

$$W_{Mínimo} = G M_T m_1 \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{D - R_L} \right) + G M_L m_1 \left( \frac{1}{D - R_T} - \frac{1}{R_L} \right).$$

El trabajo total será siempre mayor o igual a este valor:

$$W_{Total} > G M_T m_1 \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{D - R_L} \right) + G M_L m_1 \left( \frac{1}{D - R_T} - \frac{1}{R_L} \right). \quad \square$$

### VII.6.2. Energía

La situación más común es aquella en que el traslado ocurre con una cierta velocidad. El movimiento origina un término adicional en la energía, que se denomina energía cinética.

Sabemos que la energía total de un objeto es la primera integral de las ecuaciones de movimiento. En un campo gravitacional, estas ecuaciones son:

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\frac{G M m}{r^2} \hat{r}.$$

Para integrarlas entre dos puntos: A y B de la trayectoria, multiplicamos cada uno de los miembros de la ecuación por el desplazamiento  $\Delta \vec{x}_i$ , y con los distintos valores del subíndice  $i$ , vamos sumando el aporte de cada uno de los tramos en que se dividió la trayectoria.

$$\sum_{i=1}^N m \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{x}_i = -G M m \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\Delta \vec{x}_i \cdot \hat{r}}{r_i^2} \right], \quad (\text{VII.17})$$

el valor de la sumatoria que aparece en el segundo miembro ya lo calculamos en la sección anterior (ver ecuación [VII.15]). Como su resultado es independiente del camino seguido, elegimos el trayecto más simple para evaluarla: comenzamos en  $\vec{r}_A$ , se continúa en la misma dirección hasta alcanzar un radio  $r_B$  y de allí, moviéndonos sobre una esfera centrada en el punto de atracción, se alcanza  $\vec{r}_B$ .

Identificando A y B, con  $i = 1$  e  $i = N$ , respectivamente, el valor de la sumatoria es:

$$G M m \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\Delta \vec{x}_i \cdot \hat{r}}{r_i^2} \right] = G M m \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Reescribimos el primer miembro de la ecuación [VII.17], usando el hecho que  $\Delta t$  es un número, y puede aparecer dividiendo cualquiera de los dos términos de dicha ecuación:

$$\left[ \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \right] \cdot \Delta \vec{x}_i = \Delta \vec{v}_i \cdot \left[ \frac{\Delta \vec{x}_i}{\Delta t} \right],$$

Introduciendo la definición de velocidad, la sumatoria queda como:

$$\sum_{i=1}^N m \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{v}_i. \quad (\text{VII.18})$$

El motivo para realizar esta transformación fue adecuar la sumatoria a los métodos geométricos que hemos usado anteriormente. Recordemos que:

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i,$$

se evaluaba calculando el área encerrada bajo la curva  $f(x)$ . En la ecuación original,  $m\Delta\vec{v}_i \cdot [\Delta\vec{x}_i/\Delta t]$ , no había una dependencia explícita en la variable  $v_i$ , que nos permitiera aplicar directamente esta interpretación de la sumatoria. Con la permutación de  $\Delta t$ , esto es posible, como se aprecia en la ecuación [VII.18]. Más aún, el valor de esta sumatoria es conocido e independiente de la variable usada. Haciendo una analogía con el oscilador armónico, tenemos:

$$f(x) = kx \Rightarrow \sum_{i=1}^N kx_i \Delta x_i = \frac{1}{2}k[x_N^2 - x_1^2], \quad (\text{energía potencial del resorte}),$$

$$f(v) = mv, \Rightarrow \sum_{i=1}^N mv_i \Delta v_i = \frac{1}{2}m[v_N^2 - v_1^2], \quad (\text{energía cinética}).$$

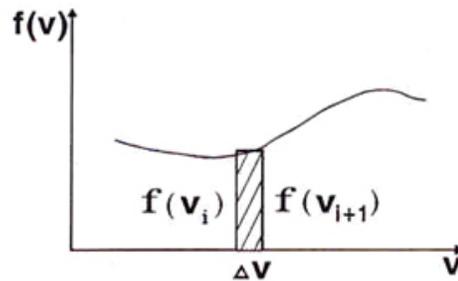


Figura VII.19: Una forma de calcular la sumatoria gráficamente, consiste en denominar uno de los términos como la función (la masa por la velocidad en el caso nuestro) y graficar sus valores en la ordenada, y poner la variable –la velocidad– en la abcisa. La suma es el área bajo la curva.

Esta suma, para el caso de un movimiento en un plano, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N v_i^x \Delta v_i^x + \sum_{i=1}^N v_i^y \Delta v_i^y, \quad (\text{VII.19})$$

donde  $v_i^x$  indica la componente  $x$  del vector velocidad  $\vec{v}$ . Análogamente  $v_i^y$ .

Como el valor de estas sumatorias ya fue calculado al estudiar el trabajo realizado por un oscilador armónico, podemos escribir el resultado de la suma que aparece en la ecuación [VII.19]:

$$\sum_{i=1}^N m\vec{v}_i \cdot \Delta\vec{v}_i = \frac{1}{2}m [\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2] = -GMm \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right], \quad (\text{VII.20})$$

ordenando los términos, se obtiene:

$$\frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 - G M m \frac{1}{r_A} = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - G M m \frac{1}{r_B}. \quad (\text{VII.21})$$

Los puntos  $A$  y  $B$  son designados arbitrariamente. La expresión escrita con subíndice  $A$  (o  $B$ ) en la última ecuación, permanece constante durante el movimiento y es lo que se denomina la *Energía*:

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{G M m}{r} = E_0. \quad (\text{VII.22})$$

$E_0$ , es la cantidad conservada que se obtiene al integrar las ecuaciones de Newton incluyendo la fuerza proveniente de la ley de gravitación universal. El término que contiene las velocidades se denomina *Energía Cinética*, y aquél que exhibe la constante  $G$ , *Energía Potencial*.

La energía potencial es –salvo un signo– la misma expresión obtenida en la sección anterior, al calcular el trabajo realizado por un agente externo, [VII.16]. El cambio de signo se introdujo en la ecuación [VII.16], cuando calculamos la fuerza que debía aplicar el individuo para *anular* la atracción gravitacional, de modo que la fuerza externa debía apuntar en sentido opuesto a la atracción. Este es el origen de la diferencia de signo.

$$\text{Definimos:} \quad V(r) \equiv -\frac{G M m}{r}, \quad T \equiv \frac{m \vec{V}^2}{2}, \quad (\text{VII.23})$$

entonces, la conservación de la energía se escribe:

$$E_o = T + V. \quad (\text{VII.24})$$

Esta ecuación es fundamental. Como se utiliza a menudo en el movimiento bajo fuerzas centrales, es conveniente escribirla de forma que contenga la otra cantidad conservada: el momento angular  $L_0$ .

### VII.6.3. Conservación del momento angular y el potencial efectivo

Para incorporar el momento angular en la conservación de la energía, descomponemos el vector velocidad a lo largo de dos direcciones: una radial, paralela al vector de posición de la partícula en un instante cualquiera, y otra perpendicular a él:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad v_{\parallel} \equiv v_r = \vec{v} \cdot \hat{r}, \quad (\text{VII.25})$$

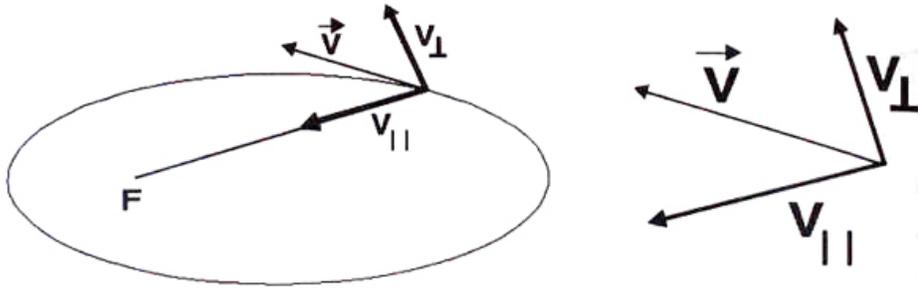


Figura VII.20: Se muestra la descomposición de la velocidad en una componente paralela y otra perpendicular a  $\vec{r}$ .  $\vec{v}_\perp$  nos permite introducir el momento angular, otra de las cantidades conservadas, en el movimiento bajo fuerzas centrales.

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario que apunta desde el foco de la elipse hasta un punto de la trayectoria, como se muestra en la Figura.

El vector  $v_\perp$ , se puede escribir como:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_r. \quad (\text{VII.26})$$

Para introducir estas cantidades en la conservación de la energía, necesitamos calcular el valor del cuadrado de la velocidad, usando la ecuación: [VII.25],

$$\vec{v}^2 = v_r^2 + v_\perp^2 + 2\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\perp, \quad \text{pero, } \vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_r = 0, \quad \text{entonces: } \vec{v}^2 = v_r^2 + v_\perp^2.$$

Incluyendo la expresión del momento angular  $L_0 \equiv m r v_\perp$ , en lugar de  $v_\perp$ , en la conservación de la energía, obtenemos:

$$E_o = \frac{1}{2} m v_r^2 + \left[ \frac{L_0^2}{2m r^2} - \frac{G M m}{r} \right] = \text{Constante}. \quad (\text{VII.27})$$

Definimos la *energía cinética radial* y el *potencial efectivo*, como:

$$T \equiv \frac{1}{2} m v_r^2, \quad V_{\text{efectivo}} \equiv \left[ \frac{L_0^2}{2m r^2} - \frac{G M m}{r} \right] \quad (\text{VII.28})$$

Aquí aparece el momento angular  $L_0$  explícitamente, y este término marca la diferencia con el potencial gravitacional  $V(r)$ , introducido anteriormente. El término que contiene  $L_0$ , se denomina la *barrera centrífuga* porque impide que una partícula con un momento angular inicial no nulo, alcance más allá de un cierto radio.

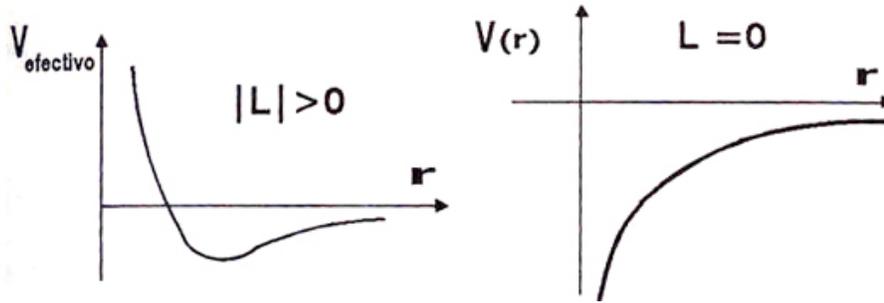


Figura VII.21: Gráficos del potencial efectivo para los casos  $L_o = 0$  y  $L_o \neq 0$ . En ambos casos el potencial decae a cero en infinito.

Usando estas definiciones, la conservación de la energía de un planeta –o cualquier otro cuerpo– moviéndose bajo la fuerza gravitacional de un cuerpo central, más masivo, es:

$$E_0 = T_{\text{radial}} + V_{\text{efectivo}}. \tag{VII.29}$$

La forma de utilizar el gráfico  $V_{\text{efectivo}}$  versus  $r$ , y otros de esta naturaleza, es la siguiente: la energía cinética es una flecha que siempre apunta en el sentido de la ordenada, puesto que:  $T \geq 0$ . El potencial efectivo está representado por una flecha vertical que baja desde la abcisa, hasta alcanzar la curva del potencial efectivo correspondiente a la coordenada  $r$ . La suma de ambas debe alcanzar el nivel que identifica a la energía  $E$ .

El hecho que la energía cinética sea siempre positiva, determina los límites del movimiento, su radio máximo y mínimo.

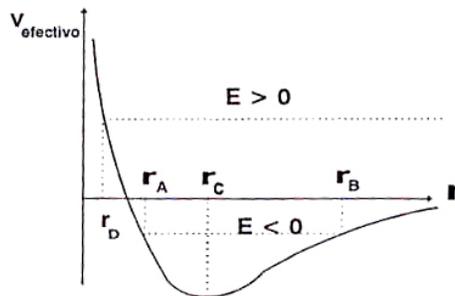


Figura VII.22: Ilustración del uso del gráfico del potencial efectivo para determinar propiedades de los objetos que se mueven bajo la influencia de fuerzas gravitacionales.

### VII.6.4. Movimiento circular

Se caracteriza porque el módulo del radio de su órbita, permanece constante, por lo tanto  $v_r = 0$ .

Incluyendo este resultado en la ecuación [VII.27], obtenemos:

$$\frac{L_0^2}{2m R^2} - \frac{G M m}{R} = \text{Constante},$$

que es el potencial efectivo [VII.28], representado en el gráfico de la Figura [VII.21]. De acuerdo a lo explicado en el último párrafo, la única órbita que no tiene *energía cinética radial*, es aquella ubicada en el mínimo del potencial, su punto más bajo.

En ese punto la partícula está obligada a permanecer con  $r = \text{Constante}$ , puesto que cualquier cambio en el valor del radio, originaría una energía cinética negativa.

#### Ejercicio

Demuestre que el punto donde el potencial efectivo alcanza su valor mínimo, corresponde a una órbita circular.

$$\frac{dV_{\text{efectivo}}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_{\text{circunferencia}}$$

Para encontrarlo, derive el potencial efectivo y hágalo igual a cero. Encontrará dos soluciones de esta ecuación, que corresponden a los lugares donde la tangente a la función  $V_{\text{efectivo}}$  es horizontal. Uno de esas soluciones es  $r \rightarrow \infty$  y la otra es el radio buscado. □

Una forma de encontrar el valor de  $r$  para el movimiento circular es la que se menciona en el Ejercicio anterior. Otra, consiste en reemplazar las leyes de Newton en la ecuación [VII.28], y evaluar la constante  $E_0$ . Si el cuerpo se mueve en una órbita circular, la segunda ley de Newton toma la forma siguiente:

$$\frac{G M}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

introduciendo la definición del momento angular, se obtiene:

$$\frac{G M m}{r} = m \omega^2 r^2 = \frac{L_0^2}{m r^2},$$

reemplazando esta expresión en la ecuación de la energía:

$$\frac{L_0^2}{2m R^2} - \frac{L_0^2}{m r^2} = -\frac{L_0^2}{2m r^2} \equiv E_o < 0,$$

finalmente, introduciendo este valor de  $E_o$  en la ecuación [VII.28], se llega a:

$$E_o = -E_o - \frac{GMm}{r}, \quad E_o = -\frac{GMm}{2r} \quad (\text{VII.30})$$

Conociendo el valor de la energía podemos encontrar el radio de la órbita circular.

Se comprueba que la energía es negativa, como corresponde a un estado ligado.

Siempre que hay un cuerpo orbitando alrededor de otro, su energía  $E_o$ , es negativa. Este hecho refleja que el cuerpo permanece sujeto al campo gravitacional del objeto central. Para liberarlo, debemos proporcionar suficiente energía cinética de modo que su energía final sea positiva. Es lo que sucede con las sondas espaciales, en la Tierra están ligadas a ella, para alcanzar otro planeta debemos proporcionarles una velocidad (o energía cinética) suficiente para escapar. Esta se denomina *velocidad de escape*.

Finalmente, notemos que la órbita circular es la más ligada: aquella que necesita mayor cantidad de energía para ser liberada.

#### Método gráfico para determinar órbitas

El gráfico del *potencial efectivo* versus *distancia radial*, nos permite caracterizar el movimiento de un objeto alrededor del centro de atracción gravitacional.

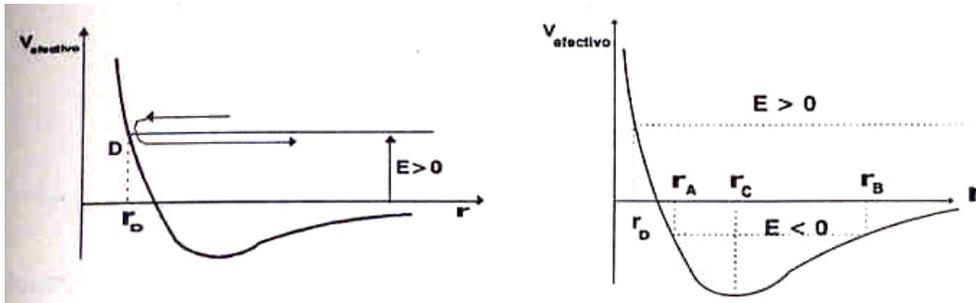


Figura VII.23: Un objeto que se acerca al Sol y luego se pierde en el espacio, sin retornar. En estos casos la energía del cuerpo es positiva, por lo tanto, son capaces de escapar de la atracción gravitacional del centro de atracción.

Como la energía permanece constante durante todo el movimiento, se representa por una línea horizontal. En la Figura [VII.23], la energía es *negativa* ( $E < 0$ ) y el movimiento está limitado a:  $r_A < r < r_B$ .

Este diagrama representa un planeta que describe una elipse en torno al Sol.

El valor negativo de  $E$ , indica que el planeta está *ligado*, es decir, no puede escapar del sistema solar, salvo que se le suministre una energía igual o mayor al valor de  $|E|$ .

El movimiento circular corresponde a un planeta que tiene una energía

$E = V_{\text{efectivo}}(r = r_c)$  con:

$$r_c = \left( \frac{2GM_{\odot}}{\omega^2} \right)^{1/3}.$$

El punto C indica un planeta en dicha situación. La recta A-B del caso anterior degenera, aquí, en un punto.

Si  $E > 0$  el objeto estelar *no* está ligado y se acerca hasta un radio mínimo  $r_D$  y luego se aleja hacia los confines del universo. Estos cuerpos sólo se observan *una vez* y desaparecen para siempre.

Cuando la energía es negativa, pero muy cercana a cero, su periodo, como se puede apreciar en la Figura [VII.23], es muy largo y demora mucho tiempo en aparecer nuevamente. Este es el caso de los cometas.

Otro ejemplo son los satélites. Inicialmente están ligados a la Tierra. Para enviarlos al espacio, necesitamos suministrarles energía. Esta la proporcionan los motores del cohete, convirtiendo energía química del combustible en energía cinética de la nave.

### Ejemplo

Calcular en coordenadas cartesianas las relaciones entre el vector posición y la velocidad en un movimiento elíptico.

$$\vec{r} = [a \cos \omega t, b \sin \omega t]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j}]$$

$$\vec{v} = -a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (-a^2 \omega + b^2 \omega) \sin \omega t \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2} \omega (b^2 - a^2) \sin 2\omega t \neq 0, \quad \text{excepto para } (\omega t) = 0, \pi/2, \dots$$

### Ejemplo

Si despreciamos la resistencia del aire y todos los inconvenientes técnicos que existen: ¿es posible poner un satélite en órbita estable, *disparándolo* con un cañón, desde un punto de la superficie de la Tierra?

De acuerdo a leyes de Kepler, este satélite queda en una órbita elíptica alrededor de la Tierra, y después de un periodo, vuelve a su punto de partida. Esta órbita es posible, si suponemos que la Tierra es perfectamente esférica, homogénea, sin atmósfera, estática...etc.

Los satélites son puestos en órbita lanzándolos verticalmente primero, y después, usando otro motor se les comunica una velocidad tangencial, para que permanezcan girando en torno a la Tierra. □

### Ejemplo

Se desea poner un satélite de masa  $m$ , en órbita circular alrededor de la Tierra. Para ello, primero se lanza verticalmente de modo que alcance una altura  $h$ . Una vez allí, se enciende otro motor que le proporciona la velocidad tangencial necesaria para mantenerlo en una órbita circular.

Encuentre la razón entre la *energía mínima*,  $\Delta U$ , que se necesita para alcanzar la altura  $h$ , y la *energía cinética*,  $\Delta T$ , necesaria para mantenerlo en esa órbita circular.

Se desea encontrar:

$$\frac{\Delta U}{\Delta T_{\text{orbital}}} = \dots?$$

Calculemos el valor de  $\Delta U$ , suponiendo que al satélite sólo le proporcionamos la energía cinética mínima para alcanzar la altura  $h$ :

$$T_i + U_i = T_f + U_f = E_o \quad \text{por conservación de la energía.}$$

$$\text{Como } T_f = 0,$$

$$T_i = \Delta U \equiv U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = -G M m \left[ \frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right]. \quad (\text{VII.31})$$

Supongamos que unos segundos antes de alcanzar dicha altura con velocidad radial nula, se enciende el último conjunto de motores y en un par de segundos le proporcionan a la nave, la velocidad tangencial necesaria para mantenerlo en órbita circular.

Evaluemos la energía cinética que le suministraron los motores en esta etapa. Usando la segunda ley de Newton para el movimiento circular, tenemos:

$$\frac{G M m}{(R_T + h)^2} = \frac{m V_{\text{orbital}}^2}{(R_T + h)}, \implies V_{\text{orbital}}^2 = \frac{G M}{(R_T + h)}.$$

Con este valor, podemos encontrar la energía cinética que necesita el satélite para mantenerse en una órbita circular:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m V_{\text{orbital}}^2 = \frac{G M m}{2(R_T + h)}.$$

Ahora podemos encontrar la razón entre ambas cantidades:

$$\frac{\Delta U}{\Delta T} = [-2(R_T + h)] \left[ \frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right] = \frac{2h}{R_T}.$$

La respuesta indica que si la altura  $2h > R_{\oplus}$ , la energía que le debemos suministrar para que alcance esa altura, es mayor que la energía cinética que necesitamos para dejarlo en órbita.  $\square$

### Ejemplo

Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su punto de máximo acercamiento –el perigeo– es igual a  $r_p$ , y su punto de mayor alejamiento –el apogeo–, es  $r_a$ . Ambos valores son conocidos. La razón entre estos dos números es  $k = r_a/r_p > 1$ . Encuentre la velocidad del satélite en el apogeo y perigeo de su órbita.

Como el apogeo y perigeo son los puntos extremos de la órbita elíptica, allí la velocidad del satélite es perpendicular a su vector posición. De esta forma, usando el momento angular, podemos demostrar que la razón entre sus velocidades es inversamente proporcional a sus radios:

$$L_o = m v_{\perp} r = \text{Constante}, \Rightarrow \frac{V_p}{V_a} = k,$$

pero  $k$ , es un dato, de modo que tenemos una ecuación para dos incógnitas:  $V_a$  y  $V_p$ . Necesitamos otra, independiente de la anterior, para resolver este sistema. La conservación de la energía es otra ecuación. Escribiéndola en su forma original, [VII.6.2], tenemos:

$$\frac{1}{2} m_s \vec{V}_a^2 - \frac{G M_T m_s}{r_a} = \frac{1}{2} m_s \vec{V}_p^2 - \frac{G M m_s}{r_p} = E_0.$$

Estas son las dos ecuaciones que necesitábamos. Lo que sigue es el álgebra necesaria para despejar las incógnitas.

Introduciendo la ecuación que relaciona la constante  $k$  con las velocidades, obtenemos:

$$\frac{1}{2} m_s \vec{V}_a^2 - \frac{G M_T m_s}{r_a} = \frac{1}{2} m_s k^2 \vec{V}_a^2 - k \frac{G M m_s}{r_a},$$

ordenándola:

$$\frac{1}{2} [k^2 - 1] \vec{V}_a^2 = [k - 1] \frac{GM}{r_a}, \Rightarrow V_a^2 = \frac{2}{k+1} \frac{GM}{r_a}.$$

Análogamente podemos encontrar la velocidad  $V_p$ .  $\square$

## VII.7. EL SISTEMA SOLAR Y NUESTRA GALAXIA

El Sol contiene el 99% del total de la masa del sistema solar, de manera que es una buena aproximación suponer que los planetas son masas puntuales que orbitan a su alrededor, sin perturbarlo. Usando la ley de Kepler,  $r^3 \omega^2 = GM_\odot$ , podemos graficar la *velocidad orbital de los planetas* versus el *radio de la órbita*.

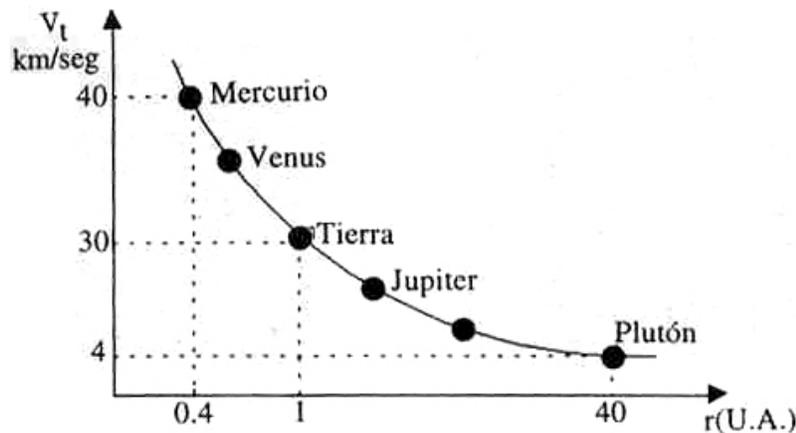


Figura VII.24: Gráfico aproximado de las velocidades orbitales de cada uno de los planetas. Se puede observar que la velocidad decae en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su distancia al Sol. Este comportamiento se ajusta a las leyes de Newton.

Podemos suponer que los planetas describen un movimiento circular, puesto que la excentricidad,  $e$ , de su órbita es muy pequeña. Su velocidad tangencial es:

$$v_{\text{tangencial}} \equiv v_t = r\omega, \quad \rightarrow \quad v_t^2 = \frac{GM_\odot}{r},$$

vemos que la velocidad orbital decae como el inverso de la raíz cuadrada del radio  $r$ , tal como se observa en los planetas. Las leyes de Newton son válidas, dentro de la precisión de estas medidas, en escalas de distancia del tamaño del sistema solar.

Aplicemos estas mismas leyes a nuestra galaxia o a cualquier otra. Implícitamente estamos suponiendo que las leyes físicas que rigen a nuestro alrededor son válidas también en el resto del universo. Este es un principio, puesto que constituye una hipótesis de trabajo, cuya veracidad sólo podemos comprobar a través de los resultados obtenidos. Si éstos coinciden con las observaciones, lo aceptamos como verdadero.

En la Figura [VII.25], se muestra un par de fotos de galaxias espirales, la nuestra es similar a la que aparece a su derecha.

Estudiemos el movimiento de las estrellas, o del gas difuso que está contenido en nuestra galaxia. Primero, especifiquemos sus características, que son en realidad genéricas: están presentes en todas las galaxias espirales. Se destaca el núcleo, que es la zona central más luminosa, un disco que contiene los brazos espirales, también luminosos y con alta tasa de formación de estrellas y, finalmente, el halo que es una zona esférica que envuelve a las anteriores, poco luminosa y que se extiende mucho más allá del disco.

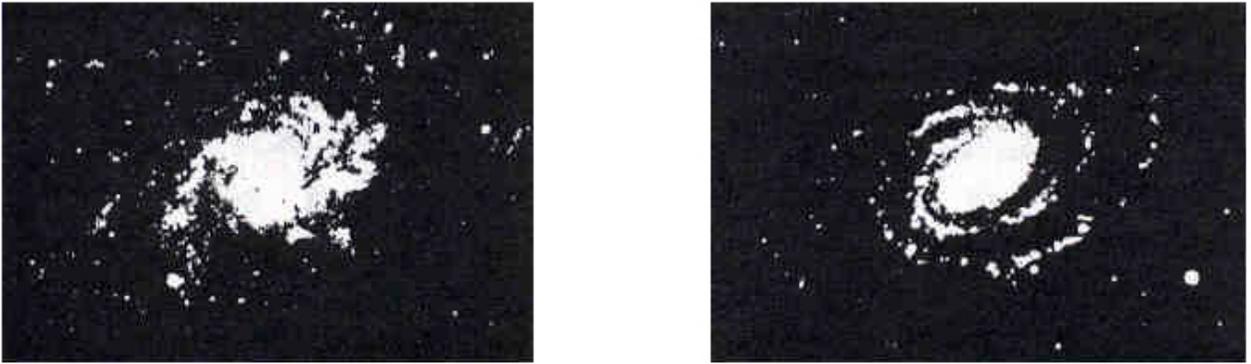


Figura VII.25: Fotos de galaxias espirales. A la izquierda aparece una galaxia similar a la nuestra, con varios brazos extendiéndose desde el núcleo. En estos brazos, continuamente se están formando nuevas estrellas. A la derecha se incluye una galaxia espiral pero con forma de barra.

A continuación aplicaremos las leyes de Newton a un modelo simple de una galaxia espiral y contrastaremos nuestros resultados con las observaciones recientes. Podemos anticipar que éstas son mucho más espectaculares que las predicciones conservadoras que sacaremos de este modelo, y de hecho, plantean –como veremos– un dilema que aún hoy no es posible resolver: aparentemente el universo contiene muchísima más masa que la estimada hasta hace poco.

En el cálculo que sigue, vamos a modelar la galaxia suponiendo que *la luminosidad es el indicador de la existencia de masa*, en otras palabras, que solamente en las regiones luminosas de una galaxia, existe una distribución de masa, en las zonas oscuras la masa es despreciable.

De acuerdo a esta suposición, concentramos toda la masa en el núcleo de la galaxia, que lo consideramos esférico y le asociamos una densidad de materia  $\rho$ , constante. En la región externa, más allá del núcleo suponemos que la densidad de masa existente es tan baja que no contribuye al campo gravitacional. No se incluyen los brazos espirales ni el disco en este modelo.

Todas estas aproximaciones simplifican al máximo los cálculos.

¿Cuál será la velocidad de una estrella describiendo una órbita circular, en las distintas regiones de este modelo propuesto para una galaxia?

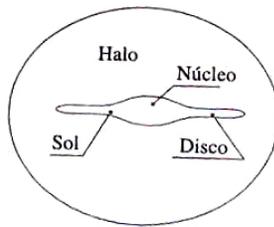


Figura VII.26: Dibujo aproximado de nuestra galaxia y la posición relativa del Sol en ella. La nuestra es una galaxia espiral. Tiene un diámetro aproximado de  $10^{21}$  m, y el Sol se ubica a una distancia de  $2,6 \times 10^{20}$  m.

Veamos primero el caso de una estrella que orbita en la región del núcleo. Como el modelo tiene simetría esférica, de acuerdo a los teoremas de Newton, la atracción gravitacional que se ejerce sobre la estrella, proviene de la masa del núcleo localizada al interior del radio de su órbita. Como también la podemos imaginar concentrada en un punto en el centro del núcleo, usamos la ley de Kepler, obteniendo:

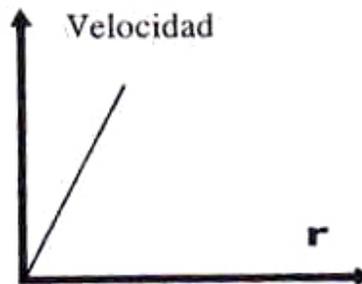
$$\omega^2 r^3 = G M_{int}, \quad M_{int} = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3.$$

Hemos usado la densidad del núcleo como constante, de acuerdo al modelo propuesto.

$$r v_{orb}^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho_0 r^3$$

$$v_{orb} = \left( \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho_0} \right) r.$$

El gráfico de esta velocidad orbital, se muestra en la Figura.



Para una estrella ubicada fuera del núcleo, toda la masa se concentra en su centro, por lo tanto  $M$  es una constante en la fórmula anterior y la velocidad orbital de la

estrella es:

$$\omega^2 r^3 = G M_{int.}, \implies v_{orbital} = \frac{\sqrt{G M_{total}}}{\sqrt{r}}. \quad (\text{VII.32})$$

Si la masa de una galaxia se asocia únicamente a su luminosidad, el gráfico *velocidad orbital* versus *distancia*, es el que se muestra en la Figura VII.27.

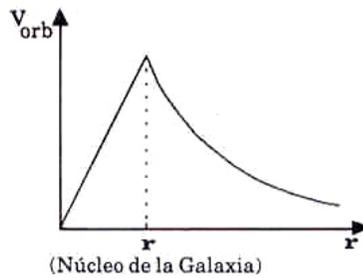


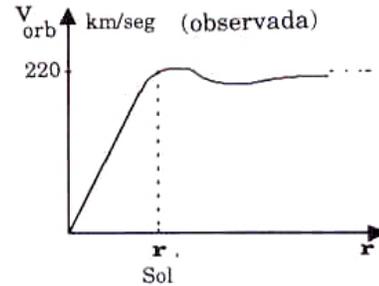
Figura VII.27: La velocidad orbital aumenta proporcionalmente al radio a medida que nos alejamos del centro de la galaxia hasta llegar al borde del núcleo, a partir del cual decrece como el inverso de la raíz cuadrada de  $r$ , de acuerdo a las leyes de Newton.

Resumiendo, en este modelo la masa asociada a una galaxia es la *masa luminosa*. Si esta fuera efectivamente la única existente, la *velocidad orbital* que observaríamos en las galaxias espirales, debería ser la señalada en la Figura.

Hasta hace unos quince años, no podían realizarse mediciones en regiones muy alejadas del núcleo por ser de muy baja luminosidad, y no era posible estudiar el comportamiento de los elementos de la galaxia en dichas regiones. Sin embargo, en la actualidad, debido esencialmente al adelanto de la electrónica, en esta última década, ha sido posible medir la velocidad orbital de los componentes de una galaxia, esencialmente gases, a grandes distancias del núcleo y por lo tanto, notablemente más oscuras.

El resultado ha sido sorprendente: *la velocidad orbital observada, permanece constante, no disminuye con la distancia*, como predecía el modelo propuesto. La velocidad orbital conserva su valor mucho más allá del borde luminoso de la galaxia, de hecho, no se ha encontrado el punto donde comience a decaer, que señale su fin.

La suposición que no existe una cantidad apreciable de masa fuera del núcleo luminoso no parece ser correcta, no concuerda –ni siquiera aproximadamente– con las observaciones.



Al contrario, suponer que el núcleo tiene una densidad constante, parece correcto.

Debemos modificar nuestro modelo para adaptarnos a las observaciones. *No modificaremos las leyes de Newton*, sino otro de los ingredientes de la teoría: la distribución de masa en la región externa de la galaxia. Su densidad no puede ser nula. Su valor debe ser tal, que reproduzca la velocidad orbital constante que se observa en esa región.

Mantenemos la simetría esférica del modelo, por simplicidad, y suponemos que las ecuaciones de Newton son válidas. Podemos entonces aplicar los teoremas de Newton, de modo que el campo gravitacional en un punto a una distancia  $r$  del centro, se puede calcular como proveniente de una masa puntual ubicada en el origen. Para que la velocidad orbital sea una curva plana, debe cumplirse que:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2},$$

de aquí vemos que si,  $v^2 = \text{Constante}$ , entonces la masa debe depender linealmente del radio:  $M(r) = [\text{Constante}] r$ . Para obtener este comportamiento, y de acuerdo al principio de simplicidad, ensayamos con una densidad  $\rho(r) = K/r^2$ , con  $K$  una constante con dimensiones de [masa/distancia]. Para calcular la masa en este caso, debemos sumar la masa contenida en cada uno de los cascarones de espesor  $\Delta r = \text{Constante}$ , y cuyo volumen es:

$$V_{\text{cascarón}} = 4\pi r^2 \cdot \Delta r.$$

La masa total generada por esta densidad, es:

$$\begin{aligned}
 \text{Masa} &= \sum_i \rho_i(r) \Delta r_i \cdot 4\pi r_i^2 \\
 &= \sum_i \frac{K}{r_i^2} \cdot 4\pi r_i^2 \Delta r_i \\
 &= 4\pi K \sum_{i=1}^N \Delta r_i \\
 \text{Masa} &= 4\pi K r.
 \end{aligned}$$

A pesar que la densidad disminuye como  $1/r^2$ , la masa total *aumenta* proporcionalmente con la distancia  $r$ . Si aceptamos que las ecuaciones de Newton constituyen la forma correcta para detectar la existencia de masa –brille o no–, concluimos que las galaxias contienen una masa oscura, invisible en una placa fotográfica.

En la actualidad se estima que la masa luminosa es un porcentaje muy bajo de la masa total que compone el universo, se calcula que es del orden de un 20 % de la masa oscura. Este resultado indica que la masa de las galaxias, y con ello, la del universo es mucho mayor que la supuesta hasta ahora y, lo que es más intrigante, que desconocemos el origen y la naturaleza de esta componente oscura.

Existen algunas hipótesis, para explicar el origen de esta materia *oscura*: podrían ser agujeros negros y planetas como Júpiter o una familia de partículas aún no detectada en el laboratorio. Este es un dilema sin resolver, en el cual se está investigando hoy.

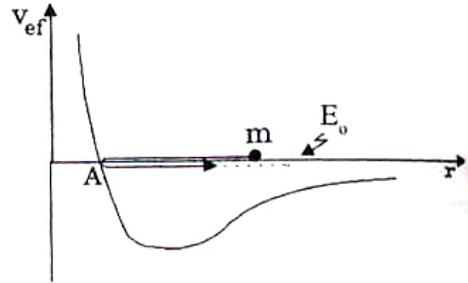
Comenzamos este capítulo relatando el descubrimiento de dos nuevos planetas: Neptuno y Plutón, ocurrido hace un siglo, mediante la aplicación de las ecuaciones de Newton al sistema solar. Hemos concluido planteando el enigma de la existencia de una masa oscura, inmersa en el universo. Este enigma contiene una suposición que no hemos querido desechar: las leyes de Newton son básicamente correctas a esta escala de distancia.

## VII.8. EJERCICIOS

- 1.- En el diagrama de la Figura, calcule el valor del radio  $r_A$  en función de  $L_0$ ,  $G$  y las masas  $M$  y  $m$ . Use la expresión para la conservación de la energía en el movimiento bajo fuerzas centrales:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} - \frac{G M m}{r}.$$

¿En qué punto del gráfico, la partícula adquiere su máxima velocidad radial?



- 2.- Suponga que el Sol comenzó a contraerse hasta que se transformó en un punto con masa igual a  $M = M_\odot$ .

a) Si la velocidad límite que puede adquirir un objeto es la velocidad de la luz  $c$ , calcule a qué *altura* sobre esta estrella colapsada, puede ubicarse un astronauta para tener posibilidades de escapar de su atracción gravitacional.

b) Una partícula describe una órbita circular alrededor de este punto masivo, con la máxima velocidad posible:  $c$ . Calcule el radio de esta órbita y la energía asociada. Recordando que  $c$  es una velocidad límite: ¿es posible que esta partícula pueda escapar de esta estrella?

c) Sobre la superficie de la Tierra, la diferencia de la aceleración de gravedad entre la cabeza de una persona y sus pies es despreciable.

Si nos encontramos cerca de una estrella colapsada –como la descrita– la situación no es la misma. Suponga que este punto tiene la masa del Sol, demuestre que la *diferencia* entre la aceleración de gravedad que siente un astronauta entre sus pies y su cabeza es:

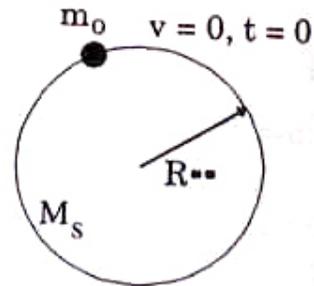
$$\Delta a = \frac{2 G M_\odot h}{R^3}, \quad \text{válido para } R \gg h.$$

Donde  $h$  es su altura,  $R$  es la distancia radial desde la estrella hasta los pies del astronauta y  $\Delta a$  es la diferencia entre la aceleración experimentada por los pies y la cabeza.

d) Suponga que físicamente, una persona no puede resistir una diferencia de aceleración  $\Delta a$ , mayor que  $5g$ , donde  $g$  es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra. Calcule a qué distancia de la estrella, este astronauta será despedazado por estas fuerzas *diferenciales*.

- 3.- a) Si  $G = 6,67 \times 10^{-8}$  [dinas  $\text{cm}^2$ ]/ $\text{g}^2$ . Calcule  $\vec{F}$  entre una masa  $m_1 = 1$  gr y  $m_2 = 1000$  gr, si están separados a 5 cm.
- b) La Tierra atrae a una masa  $m_1$ , situada sobre la superficie, con una  $\vec{F} = 9,8 \times 10^{-3}$  N. Si,  $R_{\text{Tierra}} = 6380$  km, y  $m_1 = 10^{-3}$  kg, calcule la masa de la Tierra.
- c) Calcule  $\vec{g}$  sobre la superficie de la Tierra.
- d) Calcule la aceleración de gravedad de 1 gr de masa que está a una altura de dos radios terrestres de la superficie.
- 4.- Desde un vehículo espacial se eyecta un satélite con una velocidad de  $v = 32,000$  [Km/hr], paralela a la superficie de la Tierra y a una altura de 965 km. Si el radio terrestre es de 6.380 km,  $g = 980$   $\text{cm}/\text{s}^2$ , sobre la superficie de la Tierra; ¿puede este satélite mantenerse en órbita, ya sea circular o elíptica?
- 5.- Los satélites geostacionarios están ubicados en una órbita contenida en el plano ecuatorial y con una velocidad angular igual a la terrestre, lo que les permite permanecer en una posición fija con respecto a la Tierra.
- a) Determine el radio R que debe alcanzar este satélite para instalarse en una órbita geostacionaria.
- b) Calcule la altura del satélite sobre la superficie terrestre.  
Evalúe numéricamente ambos resultados.
- 6.- Calcule el ancho de los anillos de Saturno, sabiendo que una partícula situada en el borde interior del anillo tiene una velocidad  $v_i$  y otra, situada en el borde exterior  $v_e$ .
- 7.- Explique qué es la división de Cassini que aparece en los anillos de Saturno. Su origen se atribuye a una perturbación gravitacional generada por su satélite natural Minas.  
Si el periodo de Minas es el doble del correspondiente a la división de Cassini, calcule el radio de dicha división.
- 8.- La formación de las estrellas consiste en el aglutinamiento de la materia (gas tenue) debido a la atracción gravitacional que ejerce una sobredensidad que le da origen.

Para tener una estimación del tiempo que tarda en aglutinarse una estrella, calcule cuánto demora una partícula de prueba en alcanzar el centro de una esfera de gas. Suponga que durante este proceso, la esfera de gas permanece estática.



Considere que la región que contiene la sobredensidad inicial es una esfera homogénea, cuya densidad se fija distribuyendo la masa del Sol uniformemente en un radio igual al del sistema solar,  $R_{SS}$ :

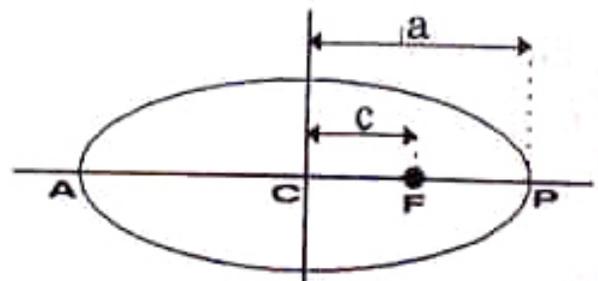
$$R_{SS} = 6 \times 10^{14} \text{ cm}, \quad M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g}, \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 / \text{s}^2.$$

Una partícula de prueba es aquella que no ejerce ninguna fuerza gravitacional, pero es afectada por la fuerza de gravedad del sistema.

- 9.- La masa del Sol es 320.000 veces la masa de la Tierra, y la distancia entre ambos es 400 veces el radio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra.
  - a) ¿Cuál es la razón entre el módulo de la fuerza de atracción Sol-Luna y la fuerza Tierra-Luna? Suponga que la distancia entre el Sol y la Luna es constante e igual a la que separa el Sol de la Tierra.
  - b) Cualitativamente (es decir sin calcular, usando sólo un dibujo), ¿cuál es la trayectoria de la Luna vista desde el Sol?
- 10.- La Figura representa la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol que ocupa el foco  $F$ . Si  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor respectivamente, y  $c$  es la distancia del centro  $C$  a un foco, demuestre que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{a + c}{a - c}, \quad \text{y}$$

$$a \cdot v_P \cdot v_A = G M_{\odot},$$



donde se conoce: la masa del Sol,  $M_{\odot}$ , la masa del planeta,  $m$ , la constante de gravitación universal  $G$ , las distancias  $a$  y  $c$  y las velocidades  $v_A$  y  $v_P$ , del planeta en el afelio y en el perihelio respectivamente.

- 11.– a) Un pulsar es una estrella que está en las etapas finales de su evolución, y que ha disminuido considerablemente su radio. Los pulsares tienen la particularidad que giran rápidamente sobre sí mismos, y están emitiendo radiación desde algunas zonas de su superficie. Esta emisión es detectada en los radio-observatorios en la Tierra, en forma periódica: cada vez que la mancha se alinea con la Tierra, recibimos un pulso, tal como vemos el destello de una baliza en una ambulancia. Calcule el radio de este pulsar, sabiendo que *inicialmente* –antes de colapsar–, tenía una masa de  $2 M_{\odot}$  y un radio de  $R = R_{\odot}$ , y su periodo de rotación era de 25 días. Se sabe que en la actualidad, en su etapa final, envía pulsos a intervalos de  $T$  segundos. Evalúe esta cantidad para  $T \sim 0,1$  s.
- b) Suponga que en su etapa de contracción, perdió la mitad de su masa. ¿Puede encontrar el radio de la estrella a partir de los datos anteriores? ¿Qué suposiciones debe hacer?
- 12.– Analice las siguientes preguntas:
- a) Si la fuerza de gravedad actúa sobre todos los cuerpos proporcionalmente a sus masas ¿por qué un cuerpo más pesado no cae más a prisa que uno liviano?
- b) ¿Espera Ud. que la energía total del Sistema Solar permanezca constante, o que su momento angular lo haga? Explique.
- c) Considere un cascarón hueco ¿cómo es el potencial gravitacional en su interior, comparado con su valor en la superficie?  
¿Cuál es la intensidad del campo gravitacional en su interior?.
- d) La información popular relativa a los satélites artificiales de la Tierra los describe como *libres de la atracción gravitacional Terrestre* ¿Es correcta esta afirmación?
- 13.– ¿Cuál es el periodo de un péndulo en la superficie de la Luna, si su periodo en la superficie de la Tierra, es de 2 segundos?
- 14.– ¿Con qué velocidad horizontal debe eyectarse un satélite, situado a una altura de 161 km sobre la superficie de la Tierra para que siga una órbita circular a su alrededor?  
¿Cuál será su periodo de rotación? ( $R_{\oplus} = 6,447$  km.)
- 15.– La distancia media entre Marte y el Sol, es de 1.524 veces la equivalente a la Tierra-Sol. A partir de estos datos, encuentre el número de años que requiere Marte para efectuar una revolución en torno al Sol.
- 16.– a) Demuestre que para escapar de la atmósfera de un planeta de masa  $M$ , una molécula debe tener una velocidad  $v$ , tal que,  $v^2 > 2GM/r$ , siendo  $r$  la distancia de la molécula al centro del planeta.

b) Determine la velocidad de escape de la Tierra para una partícula atmosférica a 1.000 km sobre la superficie de la Tierra. Repita este cálculo en el caso de la Luna y el Sol.

17.– Dos partículas de masas  $m$  y  $M$  estaban inicialmente en reposo, separadas por una distancia que consideramos infinita. Demuestre que en cualquier instante posterior, su velocidad relativa de acercamiento debida a la atracción gravitacional es:  $\sqrt{2G(M+m)/d}$ , donde  $d$  es la distancia entre ellas.

18.– Una masa de 200 gr. y otra de 800 gr. están separadas 12 cm.

a) Encontrar la fuerza gravitacional sobre una unidad de masa en un punto situado a 4 cm. de la masa de 200 gr y en la misma línea de las tres partículas.

b) Encontrar la energía potencial por unidad de masa en ese punto.

c) ¿Cuánto trabajo se necesita para mover esta unidad de masa a un punto situado a 4 cm. de la masa de 800 gr. en la línea de los centros?

19.– Encuentre la aceleración de gravedad que experimenta una partícula en un punto  $P$ , situado a una distancia  $x$ , de la superficie de una esfera de masa  $M$ , que tiene una cavidad esférica de radio  $R/4$  y cuyo centro está situado a una distancia  $R/4$ , del centro de la esfera. La densidad de masa de la esfera es  $\rho_o$ , y el punto  $P$ , el centro de la esfera  $O$  y el de la cavidad están alineados.

20.– Una partícula de masa  $m$ , oscila en un eje perpendicular a un plano infinito de densidad superficial de masa  $\sigma_o$ . La partícula se dispara con una velocidad inicial  $V_o$ , desde un pequeño agujero que se hizo en el plano infinito para permitir la oscilación.

a) Encuentre la energía potencial,  $U(x)$ , del plano infinito y gráfiquela. No considere los efectos del agujero.

b) ¿Qué valor tiene el periodo de esta partícula? Expréselo en función de  $m$ ,  $G$ ,  $\sigma_o$  y la energía inicial  $E_o$ .

c) Use el principio de superposición para encontrar la fuerza gravitacional y el potencial de dos planos infinitos, paralelos, separados por una distancia  $\ell$  y que poseen la misma densidad superficial de masa  $\sigma_o$ .

