UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FI1001-01 INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

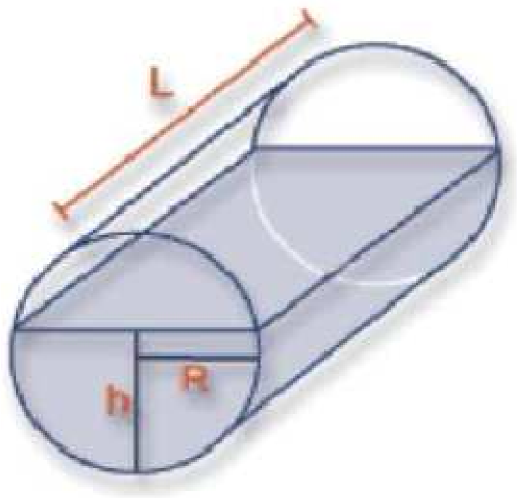
AUXILIAR Nº1

Profesora: Laura Gallardo K.
Auxiliar: Osmar Valdebenito G.
25 de marzo de 2009

1. El período de un péndulo simple tiene la siguiente fórmula: $T = \alpha l^a m^b g^c$, donde α es una constante de proporcionalidad. Determine a, b y c mediante análisis dimensional

2. Un globo se desplaza una distancia a en dirección norte ($\hat{\imath}$), luego una distancia $2a$ en dirección oeste ($\hat{\jmath}$) y luego asciende ($\hat{k}$) una distancia $3a$. Determine la magnitud del desplazamiento total y sus ángulos respecto a las direcciones $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

3. Un cilindro recostado de radio $R = 1[m]$ y largo $L = 1[m]$ contiene líquido hasta una altura $h = 110[cm]$, como indica la figura. Calcule la nueva altura del líquido, cuando el cilindro está en posición vertical. Como no está usando calculadora, deberá hacer aproximaciones. Se espera que su resultado tenga al menos dos cifras significativas (es decir, que su error para h sea menor que $1[cm]$).



4. En el año 1752, los astrónomos Landale y Lacaille determinaron en Berlín (B) y en la Ciudad del Cabo (C), a la misma hora, el ángulo entre la normal y la recta entre su posición y un punto predeterminado al borde de la luna. Los ángulos que determinaron fueron $\beta = 32{,}08°$ y $\gamma = 55{,}72°$. Ambas ciudades se ubican en el mismo meridiano y se encuentran en las latitudes $\lambda_B = 52{,}52°N$ y $\lambda_c = 33{,}39°S$. Usando para el radio terrestre el valor de $R = 6.370[Km]$, determine la distancia entre la Tierra y la Luna.

PAUTA AUXILIAR Nº1

1. Aplicando análisis dimensional:

   T = Período → $[s]$ $\quad$ m = masa → $[Kg]$

   l = Longitud → $[m]$ $\quad$ g = aceleración de gravedad → $\left[{}^{m}/_{s^2}\right]$

   Aplicando la fórmula, queda entonces:

$$[s] = \alpha \frac{[m]^a [Kg]^b [m]^c}{[s]^c}$$

   Despejando se obtiene: $\quad c = 1/2 \quad a = 1/2 \quad b = 0$

   Entonces, $T = \alpha l^{½} g^{-½} = \alpha \sqrt{\frac{l}{g}}$

   De hecho, la fórmula general para obtener el período de un péndulo simple es:

$$T(l) = 2\pi \sqrt{{}^{l}/_{g}}$$

2. Podemos representar cada uno de los desplazamientos mediante un vector. Así,

   Norte: $\vec{A} = a\hat{\imath}$,

   Oeste: $\vec{B} = 2a\hat{\jmath}$,

   Ascensión: $\vec{C} = 3a\hat{k}$,

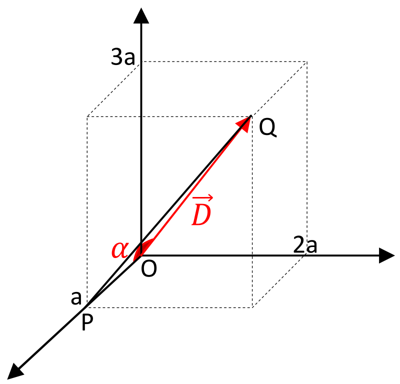
   Luego, tendremos que el desplazamiento total será la suma de los desplazamientos anteriores:

   $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = a\hat{\imath} + 2a\hat{\jmath} + 3a\hat{k}$

   Calculemos su módulo:

$$|\vec{D}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 9a^2} = \sqrt{14a^2} = a\sqrt{14}$$

   Para los ángulos, tomemos el ΔOPQ (rectángulo en P)



   donde el ángulo α es el ángulo entre $\vec{D}$ e $\hat{\imath}$. Usando $\cos\alpha = {}^{\overline{AB}}/_{\overline{AC}}$ (por definición de coseno), tenemos:

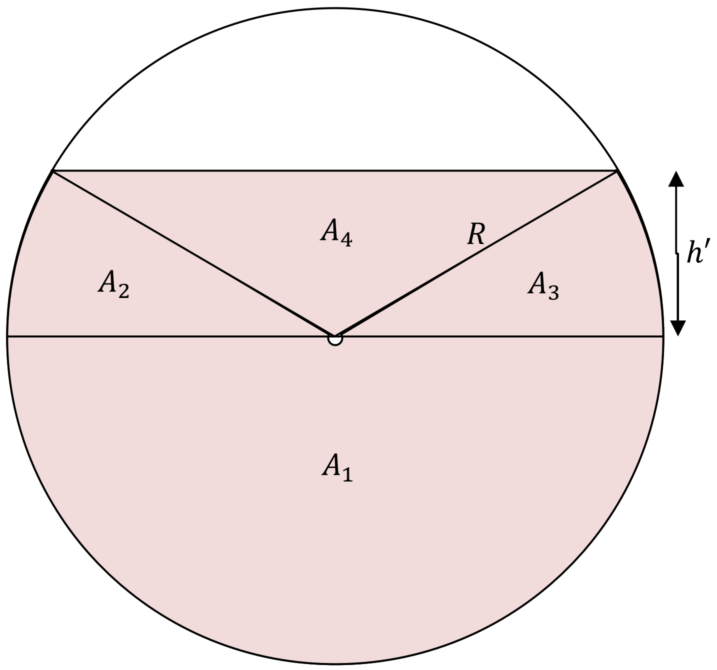
$$\measuredangle(\vec{D}, \hat{\imath}) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{D_x}}{|\vec{D}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{a\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}}{14}\right)$$

   Análogamente,

$$\measuredangle(\vec{D},\hat{\jmath}) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{D_y}}{|\vec{D}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2a}{a\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)$$

$$\measuredangle(\vec{D},\hat{k}) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{D_z}}{|\vec{D}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3a}{a\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$$

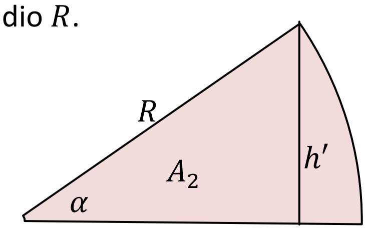
3. Al dar vuelta el cilindro, el volumen se mantiene constante, premisa que nos permitirá calcular la altura a la que llega el líquido posteriormente. El volumen original se obtiene como $V = A \cdot L$, donde A corresponde al área de la "base" del cilindro en contacto con el líquido. A la descompondremos como $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, tal como aparece en la figura (distorsionada para poder identificar los sectores)



Claramente, $A_2 = A_3$ por simetría. Además, consideremos $h' = h - R = 0{,}1[m]$

Ahora, $A_1 = \frac{\pi R^2}{2}$ por ser la mitad del área de un círculo de radio R.

Para calcular A_2 deberemos utilizar trigonometría.



Se tiene que por definición $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h'}{R}$, pero como $\alpha \ll 1$ (es decir, muy pequeño), se puede realizar la aproximación $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$. Entonces,

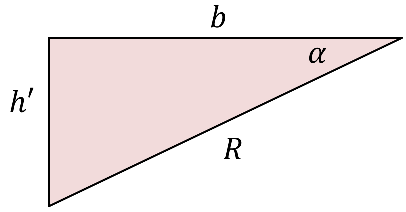
$$\alpha \approx \frac{h'}{R} = \frac{0{,}1[m]}{1\ [m]} = 0{,}1$$

Como el área de un sector circular corresponde a $A = \alpha R^2/2$, tenemos que

$$A_2 = A_3 = \frac{0{,}1 \cdot 1[m^2]}{2} = 0{,}05[m^2]$$

Ahora, para calcular el valor de A_4, calculamos el área de un triángulo isósceles de lados Ry altura h'. Para calcular el área, necesitamos saber el valor de la base.

Podríamos sacar el valor de b aplicando el teorema de Pitágoras; sin embargo, nos daría una raíz que costaría calcular sin calculadora. Utilizaremos entonces trigonometría junto a algunas aproximaciones.



Claramente, $\cos\alpha = \frac{b}{R}$, pero como ya vimos $\alpha \ll 1$. Entonces, podemos aplicar la aproximación de $\cos\alpha \approx\ 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Así, obtenemos que

$$\mathrm{b} \approx \mathrm{R}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 1[\mathrm{m}] \cdot \left(1 - \frac{0{,}1^2}{2}\right) = 0{,}995[\mathrm{m}]$$

$$\Rightarrow A_4 = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{2b \cdot h'}{2} = 0{,}995[m] \cdot 0{,}1[m] = 0{,}0995\ [m^2]$$

Así, nos queda que

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2} + 2 \cdot 0{,}05[m^2] + 0{,}0995\ [m^2] = \left(\frac{\pi}{2} + 0{,}1995\right)[m^2]$$

Por conservación de los volúmenes, tenemos entonces:

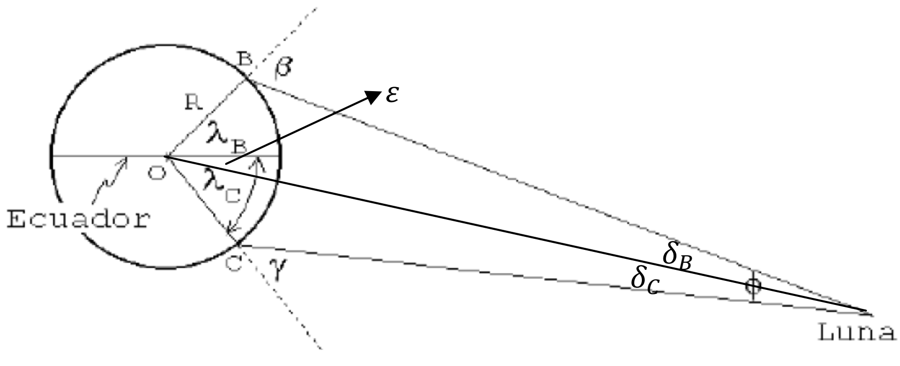
$$V_i = V_f$$

$$A_i L_i = A_f L_f$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}1995\right)[m^3] = \pi[m^2] \cdot L_f$$

Despejando y tomando $\pi \approx 3{,}14$, se obtiene que $\boxed{L_f \approx 0{,}564\ [m]}$

4. La siguiente figura ilustra el problema



Se tiene que $\left.\begin{matrix}\beta = \delta_B + \lambda_B + \varepsilon \\ \gamma = \delta_C + \lambda_C - \varepsilon\end{matrix}\right|$ Sumando, ambas ecuaciones y aplicando que $\phi = \delta_B + \delta_C$,

$$\boxed{\phi = \beta + \gamma - \lambda_B - \lambda_C}$$

Ahora, aplicando el teorema del seno

$$\frac{\operatorname{sen}(\delta_B)}{R} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \beta)}{D} \qquad \frac{\operatorname{sen}(\delta_C)}{R} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \gamma)}{D}$$

Sin embargo, $\delta_B \ll 1$ y $\delta_C \ll 1$, por lo que podemos aplicar las aproximaciones del seno para ángulos pequeños ($\operatorname{sen}\alpha \approx\ \alpha$) en ambos casos y despejando, obtenemos

$$\delta_B = \frac{R \cdot \operatorname{sen}(\pi - \beta)}{D} \qquad \delta_C = \frac{R \cdot \operatorname{sen}(\pi - \gamma)}{D}$$

Sumando ambos términos, obtenemos

$$\phi = \frac{R}{D}\big(\operatorname{sen}(\pi - \beta) + \operatorname{sen}(\pi - \gamma)\big)$$

$$\boxed{\mathrm{D} = \frac{R\big(\operatorname{sen}(\pi - \beta) + \operatorname{sen}(\pi - \gamma)\big)}{\beta + \gamma - \lambda_B - \lambda_C}}$$

Reemplazando con los valores dados en un comienzo y transformando ángulos de grados a radianes, se obtiene:

$$\mathrm{D} = \frac{6.370[Km] \cdot (0{,}826 + 0{,}531)}{0{,}02356}$$

$$\boxed{\mathrm{D} = 366.974{,}12[\mathrm{Km}]}$$

Actualmente, el radio orbital medio estimado de la Luna es de $\mathrm{D} = 384.400[\mathrm{Km}]$. Así, la estimación realizada por Landale y Lacaille tuvo un error de un 4,53%.