

# EM757 - Seminario de Telecomunicaciones

## Complemento Matemático

### Probabilidades y Procesos Aleatorios

Patricio Parada - Jorge Silva



## 1 Revisión de Probabilidades y Procesos Aleatorios

- Definiciones Básicas
- Variables Aleatorias
- Variables Aleatorias Importantes
- Momentos de una Variable Aleatoria
- Vectores Aleatorios
- Sumas de Variables Aleatorias

## 2 Procesos Aleatorios

- Conceptos Básicos
- Procesos Estacionarios
- Independencia entre Procesos Aleatorios
- Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales
- Densidad Espectral de Potencia

## 3 Procesos Gaussianos y Blancos

- Procesos Gaussianos
- Procesos Blancos
- Procesos Pasabanda

# Probabilidades y Procesos Aleatorios

- La inherente naturaleza de un sistema de comunicaciones se debe a dos razones fundamentales:
  - La naturaleza aleatoria de las fuentes de información
  - Las alteraciones y perturbaciones introducidas por el medio de comunicación.

- Concepto fundamental: **Experimento Aleatorio**.  
Es un experimento cuyo resultado no se puede predecir con certeza.



- **Espacio Muestral:** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Lo denotaremos por  $\Omega$ .
- Un espacio muestral puede ser
  - **discreto:** si el número de elementos en  $\Omega$  es finito.
  - **infinito numerable:** si el número de elementos en  $\Omega$  es infinito, pero existe una biyección entre  $\Omega$  y los números naturales  $\mathbb{N}$ .
  - **no discreto:** el resto de los casos.
- Ejemplos:
  - 1  $\Omega = \{\text{Cara, Sello}\}$ : lanzamiento de una moneda.
  - 2  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ : lanzamiento de un dado.
  - 3  $[0, \infty[$ : vida útil de una ampolleta.

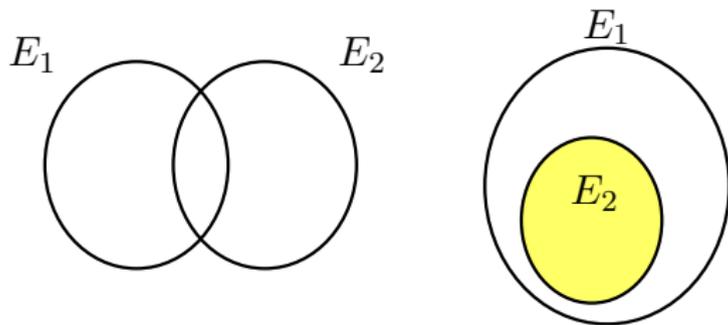
- **Evento:** corresponde a un subconjunto del espacio muestral, es decir, a un conjunto de posibles resultados.
- Ejemplos:
  - ①  $E = \{\text{el resultado de tirar un dado es un número par}\}$ .
  - ②  $E = \{\text{la vida útil de una ampolla es mayor a 3 meses}\}$ .
- **Probabilidad  $P$ :** es una función que asigna valores no negativos a todos los eventos  $E$  de forma tal que:
  - (a)  $0 \leq P(E) \leq 1$  para todos los eventos.
  - (b)  $P(\Omega) = 1$ .
  - (c) Si  $E_1, E_2, \dots$  son disjuntos, es decir,

$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i). \quad (1)$$

- 1  $P(E^c) = 1 - P(E)$ , donde  $E^c$  denota el complemento de  $E$ .
- 2  $P(\emptyset) = 0$ .
- 3  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ .
- 4 Si  $E_1 \subset E_2$  entonces  $P(E_1) \leq P(E_2)$ .



- P: Cómo incluimos nuestro conocimiento de un fenómeno para calcular su probabilidad de ocurrencia?
- R: Mediante el concepto de **Probabilidad Condicional**
- Si las probabilidades asociadas a dos eventos  $E_1$  y  $E_2$  son  $P(E_1)$  y  $P(E_2)$  respectivamente, y un observador sabe que  $E_2$  ha ocurrido, cambia la probabilidad que ocurra  $E_1$ ?
- Si hay alguna relación entre los eventos, entonces la ocurrencia de  $E_2$  puede cambiar  $P(E_1)$ . Si no la hay, entonces  $P(E_1)$  debe mantenerse inalterado.
- Ambas situaciones quedan resumidas en la siguiente fórmula:

$$P(E_1|E_2) = \begin{cases} \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} & P(E_2) \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

- Si la ocurrencia de  $E_2$  no afecta  $E_1$ , decimos que los eventos son **independientes**.

- **Partición:** una partición de un conjunto  $\Omega$  es un conjunto de subconjuntos de  $\Omega$  tal que
  - (i)  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .
  - (ii)  $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$ .
- **Teorema (Probabilidades Totales):** Sea  $A \subset \Omega$  un evento cualquiera, y asuma las probabilidades condicionales

$$\left\{ P(A|E_i) \right\}_{i=1}^n$$

conocidas, donde los  $\{E_i\}_{i=1}^n$  forman una partición sobre  $\Omega$ . Entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(A|E_i). \quad (3)$$

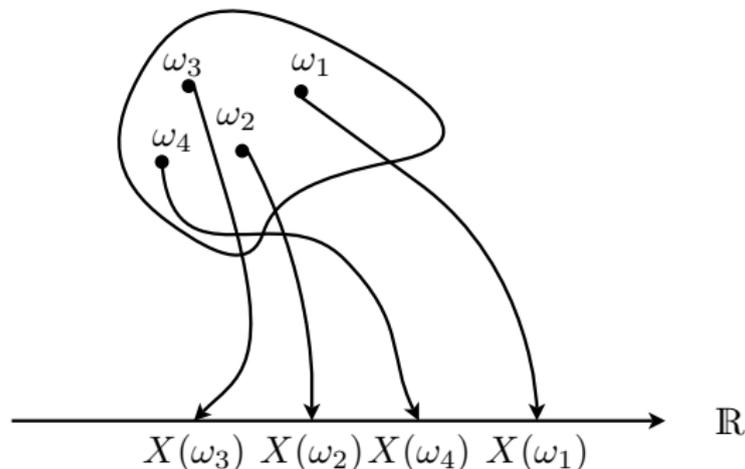
- Las fórmula de probabilidades totales puede ser utilizada para calcular

$$P(E_i|A)$$

- Corolario (Regla de Bayes):** Sea  $A \subset \Omega$  un evento cualquiera, y asuma que las condiciones para el teorema anterior se mantienen. Entonces

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^n P(E_j)P(A|E_j)}. \quad (4)$$

- Definición: Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función *medible* desde el espacio muestral  $\Omega$  al conjunto de los números reales.
- Las variables aleatorias se denotan con mayúsculas  $X$ , mientras que los valores que ellas toman (realizaciones) con minúsculas  $x$ .



- Definición: La función **distribución de probabilidad acumulativa** de una v.a.  $X$  es

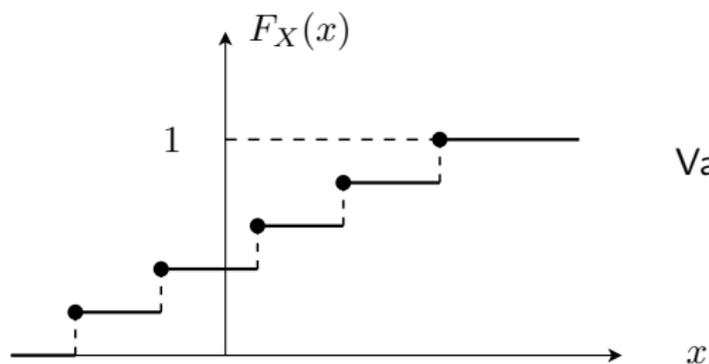
$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \\ &= P(X \leq x). \end{aligned} \quad (5)$$

- Propiedades:

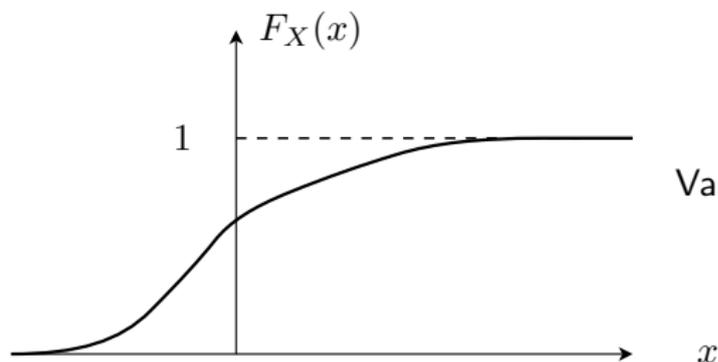
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ .
- $F_X(x)$  es no decreciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .
- $F_X(x)$  es continua por la derecha, es decir

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x + \epsilon) = F(x).$$

- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .
- $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$ .



Variable Aleatoria  
Discreta



Variable Aleatoria  
Continua

- **Definición:** La **función de densidad de probabilidad** de una variable aleatoria continua  $X$  es la derivada de  $F_X(x)$ :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x). \quad (6)$$

- **Propiedades:**

①  $f_X(x) \geq 0.$

②  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$

③  $\int_a^b f_X(x)dx = P(a < X \leq b).$

- ④ en general

$$P(X \in A) = \int_{x \in A} f_X(x)dx$$

⑤  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du.$

- Definición: La **función de masa de probabilidad** (f.m.p) de una variable aleatoria discreta  $X$ , corresponde al equivalente a las densidades de probabilidad del caso continuo.
- La f.m.p. queda definida como

$$p_i = P(X = x_i). \quad (7)$$

- Propiedades:

①  $p_i \geq 0$ .

②  $\sum_i p_i = 1$ .

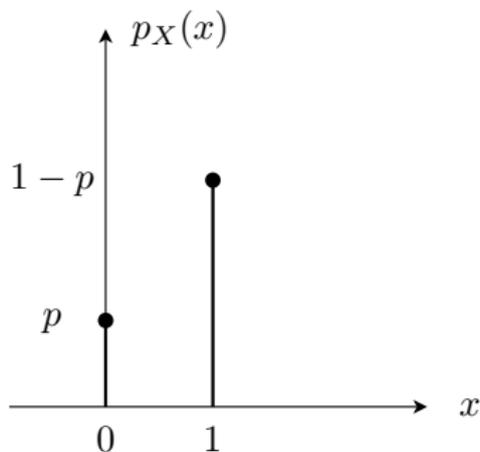
③  $P(a < X \leq b) = \sum_{i:a < x_i \leq b} p_i$ .

- ④ en general

$$P(X \in A) = \sum_{i \in A} p_i$$

⑤  $F_X(x) = \sum_{i \leq x} p_i$ .

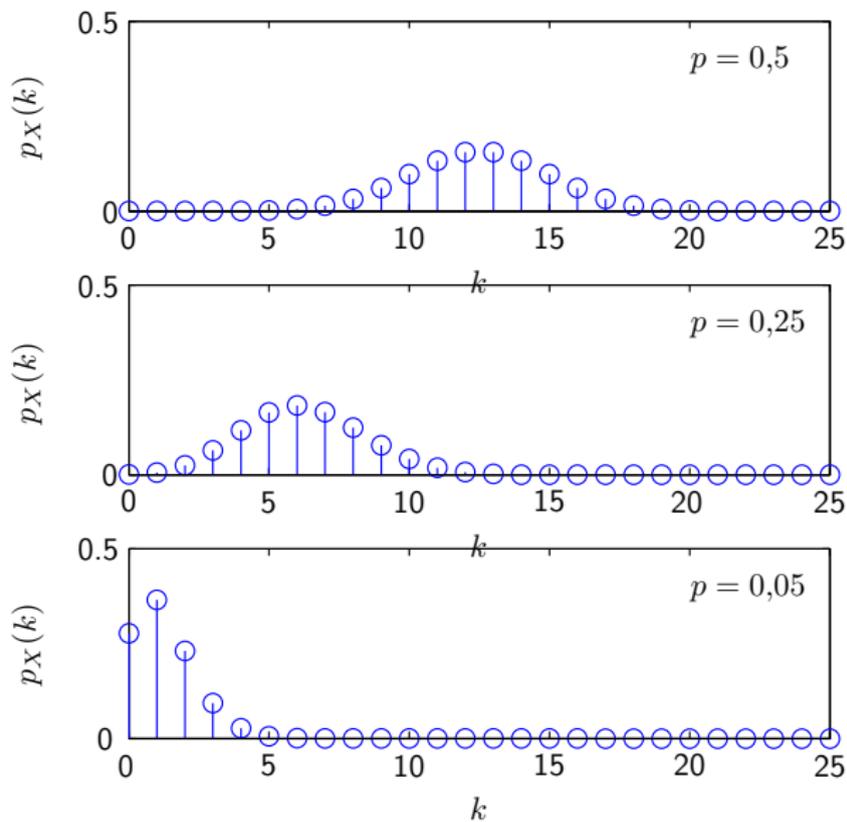
- **Bernoulli** ( $p$ ). Una v.a. Bernoulli ( $p$ ) es una v.a. que toma sólo dos valores, como por ejemplo, 0 y 1 con probabilidad  $p$  y  $1 - p$ .  
Aplicación: modela los errores introducidos por un canal binario, o los símbolos emitidos por una fuente de información binaria.



- **Binomial**  $(p, n)$ . Una v.a. binomial  $(p, n)$  es una v.a. que representa  $n$  repeticiones de una v.a. Bernoulli  $(p)$ .  
La f.m.p. corresponde a

$$P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Aplicación: Esta v.a. modela el número de bits erróneos recibidos en una transmisión, en un canal binario que comete errores con probabilidad  $p$ .

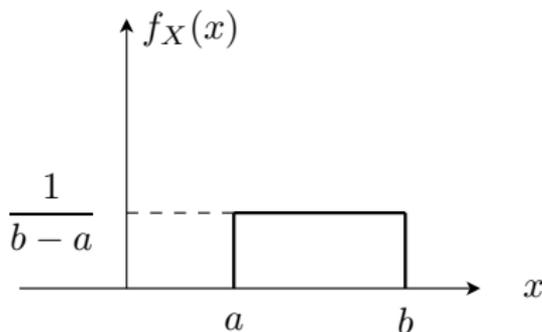


- **Uniforme**  $[a, b]$ . Es una v.a. continua que toma valores no nulos en el intervalo  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Su f.d.p. es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Aplicación: Esta v.a. sirve para modelar parámetros sobre lo único que se sabe es que pertenecen a un rango dado.



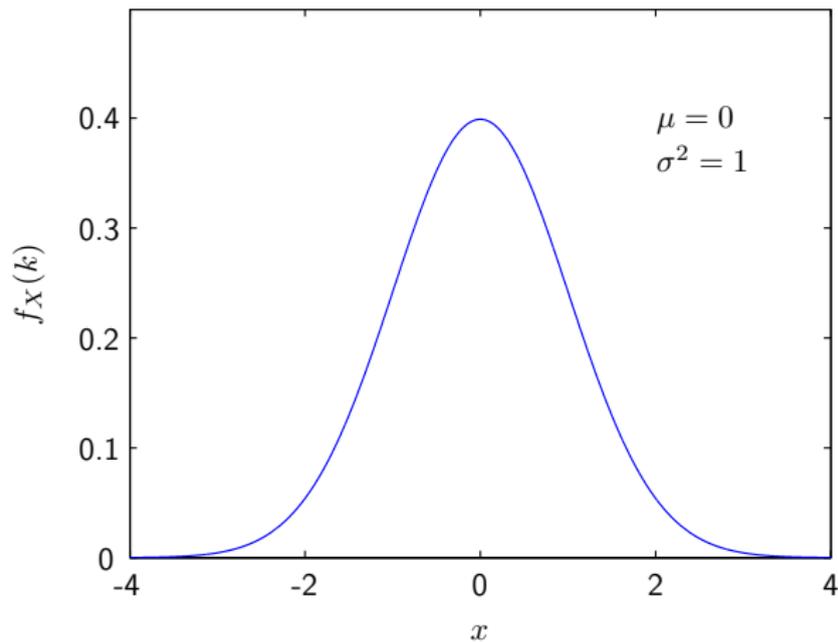
- **Gaussiana**  $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ . Es una variable cuya f.d.p. es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}.$$

La v.a. Gaussiana tiene dos parámetros:

- $\mu$ : valor medio de  $X$ .
- $\sigma$ : desviación estándar de  $X$  respecto de la media  $\mu$ .

La v.a. Gaussiana  $\mathcal{N}(0, 1)$  recibe el nombre de normal estándar.



- Aparece frecuentemente en problemas de comunicaciones.
- Modela el ruido termal introducido por los equipos de comunicaciones en el canal.
- La función acumulativa de probabilidad de una  $\mathcal{N}(0, 1)$  se puede expresar de dos formas:
  - La función de error  $\text{erf}(x)$ , que corresponde a

$$\text{erf}(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = F_X(x).$$

- La función  $Q(x)$  definida como

$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - F_X(x).$$

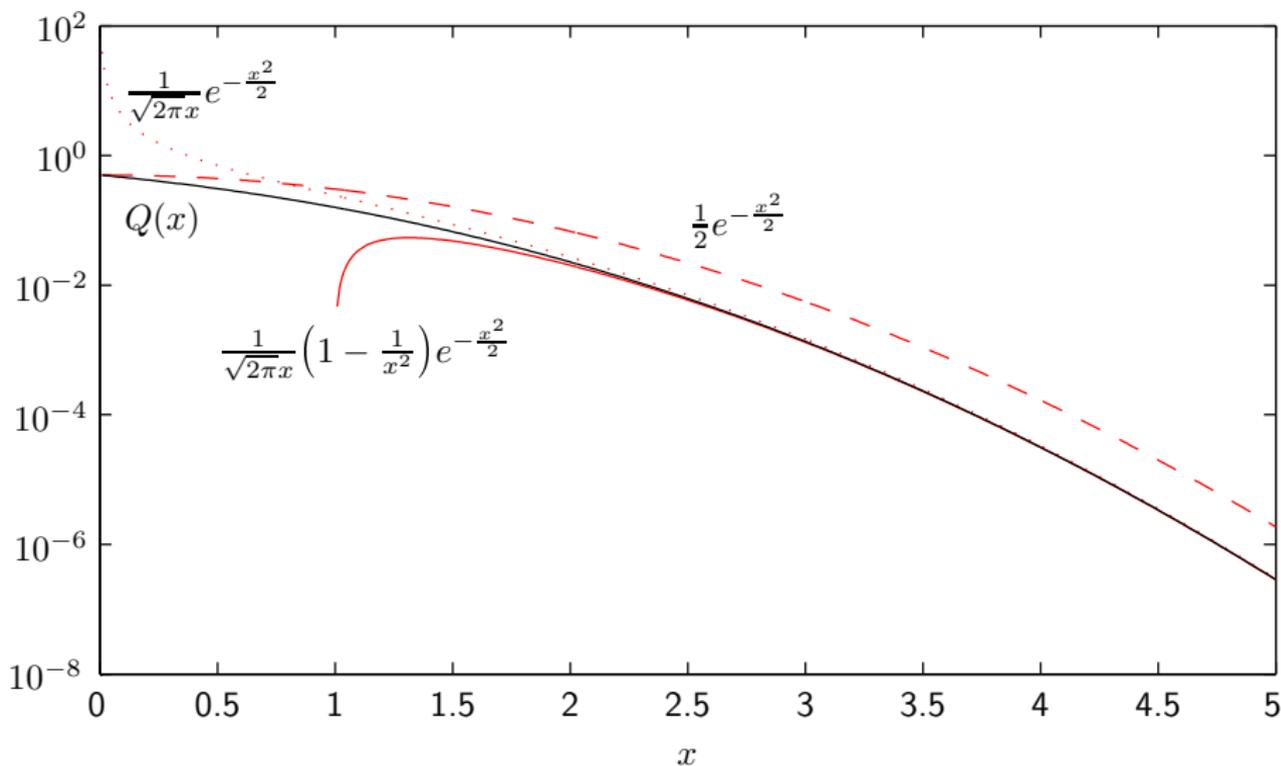
- La función  $Q(x)$  representa el área en la cola de la distribución.

- $Q(-x) = 1 - Q(x)$ .
- $Q(0) = \frac{1}{2}$ .
- $Q(\infty) = 0$ .
- 

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (8)$$

para todo  $x \geq 0$ .

# Cotas para la Función $Q(x)$



- Una función  $Y = g(X)$  puede ser una variable aleatoria también.
- Si la función es continua o al menos tiene un número finito de discontinuidades, podremos asegurar que  $Y$  es una variable aleatoria también.
- La distribución de  $Y$  la podemos obtener utilizando la definición

$$F_Y(y) = P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \leq y\}. \quad (9)$$

Sea  $X$  una v.a. Gaussiana con media  $\mu = 0$  y desviación estándar  $\sigma = 1$ . Determine la función densidad de probabilidad de  $Y = aX + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

## SOLUCIÓN

En este caso  $y = g(x) = ax + b$ . Por lo tanto,  $x = \frac{y - b}{a}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \leq y\} &= P\{\omega \in \Omega : aX(\omega) + b \leq y\} \\ &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \frac{y - b}{a}\} \\ &= F_X\left(\frac{y - b}{a}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{dF_Y}{dy}(y) \\&= \frac{dF_Y}{dy}\left(\frac{y-b}{a}\right) \\&= \frac{d}{dx}F_X(x) \times \frac{dx}{dy}. \\&= f_X(x) \times \frac{1}{dy/dx}.\end{aligned}$$

En este caso entonces tenemos:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ \frac{dy}{dx} &= g'(x) = a.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right).$$

Es decir, si  $X$  es una variable aleatoria Gaussiana,  $Y = aX + b$  también lo es. En efecto, si  $X$  es  $\mathcal{N}(0, 1)$ , entonces  $Y$  es  $\mathcal{N}(b, a^2)$ .

## Definición

El  $n$ -ésimo momento de una variable aleatoria  $X$  queda definido por

$$m_X^{(n)} \triangleq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(y) dx & \text{si } X \text{ es una v.a. continua} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} x^n p_x & \text{si } X \text{ es una v.a. discreta} \end{cases} \quad (10)$$

También se utiliza la notación  $E[X^n]$ .

- El momento de order 0 nos entrega la condición de normalización:

$$m_X^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) dx = 1.$$

- El momento de orden 1 es llamado la **media**, **valor esperado** o simplemente **esperanza** de la v.a.  $X$ .

$$m_X^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} x f_X(y) dx = \mu.$$

El valor esperado de una variable aleatoria es denotado como  $E[X]$ .

- El momento de orden 2 de una variable aleatoria permite saber cuan amplia es la variación de una v.a. en torno a su valor esperado.
- Esto es, se puede interpretar como el grado de impredecibilidad de una v.a.
- La varianza de una v.a., denotada por  $\sigma_X^2$  se define por

$$\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

La desviación estándar de la v.a.  $X$  se define como

$$\sigma_X = \sqrt{\text{VAR}[X]}.$$

- El valor esperado de la función de una variable aleatoria se puede calcular generalizando la definición anterior.

$$E[g(X)] = \int_{x \in \mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

- Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\frac{\begin{array}{ccc} f(X) & E[X] & \text{VAR}[X] \\ cX & cE[X] & c^2\text{VAR}[X] \\ c & c & 0 \\ X + c & E[X] + c & \text{VAR}[X] \end{array}}{\hline}$$

donde  $X$  es una v.a. a valores reales, y  $c \in \mathbb{R}$  es una constante.

- En diversos casos nos interesará estudiar el comportamiento estadístico de conjuntos de variables aleatorias.
- El caso más elemental corresponde al de un par de variables aleatorias  $(X, Y)$ .
- Las definiciones vistas generalizan como siguen:
  - Definimos la función distribución de probabilidad conjunta  $F_{XY}(x, y)$  como sigue:

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x; Y(\omega) \leq y\}.$$

o simplemente

$$= P\{X \leq x; Y \leq y\}.$$

- La función densidad de probabilidad conjunta  $f_{X,Y}(x, y)$  se define como

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y).$$

- La función densidad marginal se calcula como

$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$$

- La función densidad condicional de una variable  $Y$  dado que el valor de la v.a.  $X$  es igual a  $x$  es

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} & f_X(x) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

- Otras propiedades importantes son las siguientes:

- $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$
- $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1.$
- $P((X, Y) \in A) = \iint_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y) dx dy$

- El valor esperado de la v.a.  $g(X, Y)$  es

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

- La covarianza de  $(X, Y)$  es una medida del grado de relación o dependencia que existe entre dos variables aleatorias cualquiera.
- La definimos como

$$\text{COV}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]. \quad (11)$$

- Si  $\text{COV}(X, Y) = 0$  entonces  $E[XY] = E[X]E[Y]$  y decimos que  $X$  e  $Y$  no son correlacionadas.
- Definimos el **coeficiente de correlación**  $\rho_{X,Y}$  como

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- En general, si dos v.a.'s son independientes entonces no están correlacionadas. Sin embargo, le falta de correlación no es suficiente para implicar independencia.
- El único caso donde tenemos la doble implicancia es cuando  $(X, Y)$  es un par binormal.

Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias,  $c_i \in \mathbb{R}$  constantes. Entonces

- $E[\sum_i c_i X_i] = \sum_i c_i E[X_i]$
- $\text{VAR}[\sum_i c_i X_i] = \sum_i c_i^2 \text{VAR}[X_i] + \sum_i \sum_{j \neq i} c_i c_j \text{COV}(X_i, X_j)$ .
- $\text{VAR}[\sum_i c_i X_i] = \sum_i c_i^2 \text{VAR}[X_i]$ , si  $X_i$  y  $X_j$  no están correlacionados para  $i \neq j$ .

Un caso especial lo constituyen un vector aleatorio multinormal. Es una generalización de la v.a. Gaussiana al caso  $n$  dimensional. En el caso de dos variables tenemos la función densidad binormal

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right\} \quad (12)$$

- Existen varias formas de estudiar las propiedades de sumas de variables aleatorias.
- En el caso de considerar  $X_1, \dots, X_n$ , independientes e igualmente distribuidas tenemos que

$$f_{\sum_{i=1}^n X_i}(x) = (f * f \dots * f)(x).$$

- Existen dos resultados más generales que nos indican el comportamiento de sumas de grandes cantidades de variables aleatorias: ellas son la **Ley de los Grandes Números** y el **Teorema Central del Límite**.

- **LGN:** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una secuencia de v.a.'s con el mismo valor esperado  $\mu_x$  y varianza  $\sigma_x^2 < \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu_X\right| > \epsilon\right) = 0 \quad (13)$$

para cualquier  $\epsilon > 0$ .

- Esto quiere decir que el promedio de variables aleatorias converge en probabilidad al valor esperado  $\mu_X$ .

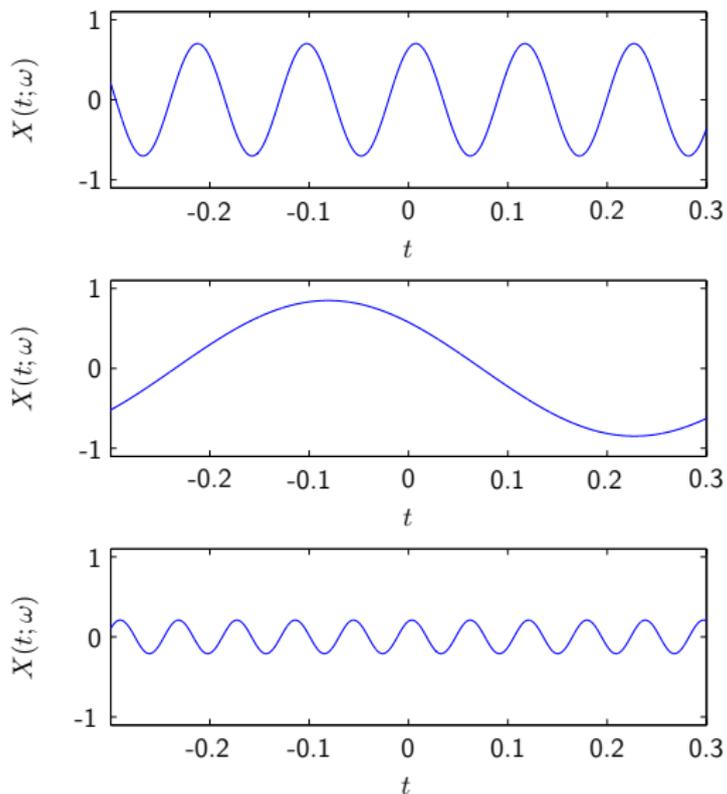
- Este resultado nos da una idea del tipo de distribución que tiene el promedio de variables aleatorias.
- Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias i.i.d. (independiente e idénticamente distribuidas) con valor esperado  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .  
Entonces

$$\text{dist}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2). \quad (14)$$

- Esto es, la suma de v.a.'s converge a una variable aleatoria Gaussiana con el mismo valor esperado y la misma varianza que las variables originales.

- Un **proceso aleatorio** (también llamado proceso estocástico) es la generalización natural del concepto de variable aleatoria al caso de señales.
- En cualquier sistema de comunicaciones uno debe manejar señales dependientes del tiempo.
- En cursos básicos de señales y sistemas ellas son tratadas como determinísticas.
- Por qué entonces cambiar al enfoque aleatorio?
  - Naturaleza física de la señal es aleatoria. Esto corresponde al ruido térmico en electrónica o al caso del comportamiento de las reflexiones en la ionósfera para el caso de radio.
  - La incerteza propia de las fuentes de información.

- Definición: Un **proceso aleatorio** o **señal aleatoria** corresponde a un mapeo entre un espacio de eventos  $\Omega$  y el conjunto de realizaciones posibles de una señal. Asociado a ella encontramos un medida o ley de probabilidad similar a las que encontramos en v.a.'s.
- Un proceso aleatorio es una variable aleatoria generalizada, en el sentido que toma como valores funciones en lugar de números.
- Ejemplos
  - ① Sea  $\Theta \in [0, 2\pi]$  es una variable aleatoria uniforme. Definimos el proceso aleatorio  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ , donde  $A$  y  $f_0$  son constantes reales.
  - ② Sea  $X(t) = X$  una v.a. uniformemente distribuida en  $[-1, 1]$ .



- Vemos que para cada  $\omega_i \in \Omega$  existe una señal  $X(t; \omega_i)$  que es determinística. Esta función recibe el nombre de **camino muestral** o **realización** del proceso.
- Para un instante  $t_0$  fijo,  $X(t_0; \omega)$  es una variable aleatoria.
- Por lo tanto, en cualquier instante, el valor de una proceso aleatorio es una variable aleatoria.
- Si definimos  $(t_0, t_1, \dots, t_N)$  instantes entonces,  $(X(t_0; \omega), \dots, X(t_N; \omega))$  define un vector aleatorio.
- Podemos hablar entonces de densidades, valores esperados, varianzas, etc. de procesos aleatorios.

- Definición: La media o esperanza de un proceso aleatorio  $X(t)$  es una función determinística denotada por  $\mu_X(t)$  que en cada instante de tiempo  $t$  es igual a la esperanza de  $X(t)$ . Esto es

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \quad \forall t.$$

- Ejemplo: Determinemos el valor esperado de  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ , donde

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(\theta).$$

Entonces,

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$

- Definición: La **función de autocorrelación** de un proceso aleatorio  $X(t)$  y que denotaremos por  $R_X(t_1, t_2)$  es una función definida como

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]. \quad (15)$$

- Si el p.a. es continuo, entonces

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

- Ejemplo: consideremos nuevamente  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ , con  $\Theta$  uniforme en  $[0, 2\pi]$ . Entonces

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[A \cos(2\pi f_0 t_1 + \Theta) A \cos(2\pi f_0 t_2 + \Theta)] \\ &= A^2 E\left[\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\right] + A^2 E\left[\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Theta)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

- Nos interesa introducir una noción de estabilidad o equilibrio para el caso de procesos estocásticos.
- Esta idea de estabilidad debería manifestarse como la mantención de alguna propiedad en forma independiente del instante en que se haga la medición.
- Dependiendo de qué propiedad es independiente del tiempo hablaremos de distintos tipos de estacionariedad.
- Un proceso estacionario en sentido amplio (*wide-sense stationary process*) es aquel cuyo valor esperado y función de autocorrelación es independiente del instante en que se haga la medición.

### Definición

Un proceso  $X(t)$  es estacionario en sentido amplio (WSS) si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i)  $\mu_X(t) = E[X(t)]$  es independiente de  $t$ .
- (ii)  $R_X(t_1, t_2)$  depende sólo de la diferencia  $\tau = t_1 - t_2$  y no de  $t_1$  y  $t_2$  en particular.

- En general, si sólo decimos que el proceso es estacionario estaremos diciendo implícitamente que el proceso es WSS.
- En este caso,  $\mu_X(t) = \mu_X$  y  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ .
- El proceso  $X(t)$  visto en los ejemplos anteriores es WSS.

- En general, un proceso aleatorio no es un ente aislado.
- Si consideramos un sistema lineal descrito por la respuesta al impulso  $h(t)$ , cabe preguntarse cuál es la dependencia que existen entre la salida del sistema  $Y(t; \omega)$  y su entrada  $X(t; \omega)$ .
- Definición: Dos procesos  $X(t)$  e  $Y(t)$  son **independientes** si para cualquier  $m, n \in \mathbb{N}$ , instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  y  $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$  los vectores  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  e  $(Y(\tau_1), \dots, Y(\tau_m))$  son independientes.
- Definición: Dos procesos  $X(t)$  e  $Y(t)$  son **no correlacionados** si para cualquier  $m, n \in \mathbb{N}$ , instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  y  $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$  los vectores  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  e  $(Y(\tau_1), \dots, Y(\tau_m))$  son no correlacionados.

- La **correlación cruzada** entre dos procesos aleatorios  $X(t)$  e  $Y(t)$  queda definida por

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = R_{Y,X}(t_2, t_1).$$

- Dos procesos  $X(t)$  e  $Y(t)$  son **conjuntamente estacionarios en sentido amplio (JWSS)**, o simplemente, **conjuntamente estacionarios**, si cada uno es WSS por separado y la correlación cruzada depende sólo de la diferencia entre  $t_1$  y  $t_2$ , esto es,

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(t_1 - t_2) = R_{X,Y}(\tau).$$

- Considere dos procesos conjuntamente estacionarios  $X(t)$  e  $Y(t)$ . Determine la autocorrelación del proceso  $Z(t) = X(t) + Y(t)$ .
- Solución:

$$\begin{aligned}R_Z(t + \tau, \tau) &= E[Z(t + \tau)Z(\tau)] \\&= E[(X(t + \tau) + Y(t + \tau))(X(\tau)Y(\tau))] \\&= E[X(t + \tau)X(\tau)] + E[X(t + \tau)Y(\tau)] \\&\quad + E[X(\tau)Y(t + \tau)] + E[Y(t + \tau)Y(\tau)] \\&= R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{X,Y}(-\tau) + R_Y(\tau).\end{aligned}$$

- Queremos estudiar las propiedades del proceso aleatorio

$$Y(t) = h * X(t)$$

en términos de las propiedades del proceso aleatorio de entrada  $X(t)$  y la respuesta al impulso de un sistema LTI (Linear-time invariant) dada por  $h(t)$ .

- Nos interesa conocer las respuestas a las siguientes preguntas:
  - Bajo qué condiciones el proceso  $Y(t)$  es estacionario?
  - Bajo qué condiciones los procesos  $X(t)$  e  $Y(t)$  serán conjuntamente estacionarios?
  - Cuál es el valor esperado y la autocorrelación de  $Y(t)$  y cuál es la correlación cruzada entre  $X(t)$  e  $Y(t)$ ?

Sea  $X(t)$  un proceso estacionario en el sentido amplio, con media  $\mu_X$  conocida y sea  $h(t)$  la respuesta al impulso de una sistema lineal invariante en el tiempo. Por definición

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) &= E[Y(t)] = E[h * X(t)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)X(\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)E[X(\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\mu_X d\tau \\ &= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mu_Y$  es independiente del tiempo.

$$\begin{aligned}R_{X,Y}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\&= E\left[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)X(s)ds\right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)E[X(t_1)X(s)]ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_X(t_1 - s)ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(-u)R_X(\tau - u)du \\&= h(-\tau) * R_X(\tau).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\&= E\left[Y(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)X(s)ds\right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)E[Y(t_1)X(s)]ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_{Y,X}(t_1 - s)ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_{X,Y}(s - t_1)ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t_1 - u)R_{X,Y}(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - u)R_{X,Y}(u)du \\ &= R_{X,Y}(\tau) * h(\tau) \\ &= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau).\end{aligned}$$

- El contenido de energía de un proceso aleatorio puede ser calculado o estimado a partir de las características espectrales de los posibles valores que puede tomar.
- Si el proceso varía en forma lenta, la mayor parte de la energía estará concentrada en las frecuencias bajas.
- Si el proceso varía en forma rápida, la mayor parte de la energía estará concentrada en las frecuencias altas.
- Una función útil para describir el contenido de potencia de un proceso estocástico es la **densidad espectral de potencia** o, simplemente, el **espectro de potencia** de un proceso aleatorio.
- Notación: El espectro de potencia de un proceso aleatorio  $X(t)$  será denotado por  $S_X(f)$  y será medido en Watts/Hz.

## Teorema

Sea  $X(t)$  un proceso estacionario  $X(t)$ . La densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, i.e.,

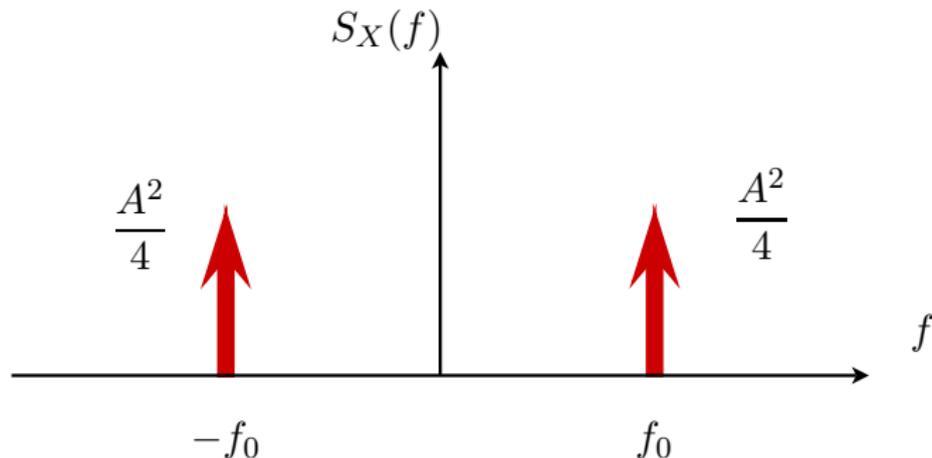
$$S_X(f) = \mathfrak{F}[R_X(\tau)]. \quad (16)$$

- Ejemplo: Considere el proceso  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$  antes estudiado. Sabemos que es un proceso estacionario en el sentido amplio.
- Su función de autocorrelación está dada por

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$$

- Por lo tanto, su densidad espectral de potencia es

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left[\frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)\right] = \frac{A^2}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$



- La potencia total de un proceso es la suma del contenido de potencia a lo largo de las distintas frecuencias.
- Si  $X(t)$  es un proceso aleatorio, la potencia del proceso, que denotaremos por  $P_X$  es

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \quad (17)$$

- Si el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$
$$\Rightarrow R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = P_X.$$

- Determinamos que en un sistema LTI  $\mu_Y$ ,  $R_Y(\tau)$  y  $R_{X,Y}(\tau)$  preservan las propiedades del proceso de entrada.
- En particular,

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \mu_X H(0).$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

$$R_{X,Y}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

- Por lo tanto

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2. \quad (18)$$

- El espectro cruzado de potencia  $S_{X,Y}(f)$  se define como

$$S_{X,Y}(f) = \mathcal{F}[R_{X,Y}(\tau)]. \quad (19)$$

- En el caso de un sistema LTI tenemos

$$S_{X,Y}(f) = S_X(f)H^*(f). \quad (20)$$

- Como  $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ , entonces

$$S_{Y,X}(f) = S_{X,Y}^* = S_X(f)H(f).$$

- Considere una resistencia  $R$ .
- El movimiento de los electrones al interior de  $R$  será proporcional a la temperatura de la resistencia. Mientras mayor sea ésta, mayor será el movimiento de los electrones.
- La temperatura tiene un efecto directo en la corriente circulante.
- Cada electrón puede verse como una pequeña fuente cuyo comportamiento es independiente del resto de los electrones.
- La corriente total será la suma de las contribuciones de las corrientes generadas por todos los electrones.

- Si modelamos la corriente de  $j$ -ésimo electrón como una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida  $I_j$  igual al resto, entonces la corriente media total será el promedio de las contribuciones de cada una ellas, esto es

$$\frac{1}{J} \sum_{j=0}^J I_j \xrightarrow{J \rightarrow \infty} \mathcal{N}(\mu_I, \sigma_I^2).$$

- Esto último proviene de aplicar el Teorema Central del Límite.

## Definición

Un proceso aleatorio  $X(t)$  será un **proceso Gaussiano** si para todo  $n$  y  $(t_1, \dots, t_n)$  las variables aleatorias  $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$  son conjuntamente Gaussianas.

## Definición

Dos procesos aleatorios  $X(t)$  e  $Y(t)$  son **procesos conjuntamente Gaussianos** si para todo  $n, m$  y  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  y  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ , el vector aleatorio

$$(X(t_1), \dots, X(t_n), Y(\tau_1), \dots, Y(\tau_m))$$

se distribuye de acuerdo a una densidad Gaussiana  $n + m$ -dimensional.

- 1 Si un proceso Gaussiano  $X(t)$  pasa a través de un sistema LTI, su salida  $Y(t)$  es también Gaussiano, y aun más, los procesos  $X(t)$  e  $Y(t)$  son conjuntamente Gaussianos.
- 2 Si  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  son conjuntamente Gaussianos, entonces  $X_i(t)$  es independiente de  $X_j(t)$  (para  $i \neq j$ ) si y sólo si  $X_i(t)$  es no correlacionado con  $X_j(t)$ .

- Un proceso blanco es aquel en que todas las componentes de frecuencia aparecen con igual potencia, es decir, es aquel cuya densidad espectral de potencia es constante.
- Definición: Un proceso  $X(t)$  es llamado proceso blanco si su densidad espectral de potencia  $S_X(f)$  es constante para todo  $f$ .
- Notemos que un proceso blanco tiene potencia total infinita:

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_0df = \infty.$$

- En la práctica, los sistemas tienen una potencia finita, por lo que un proceso blanco no tiene significado físico.

- Sin embargo, el ruido termal tiene una potencia relativamente constante (entre 0 y  $10^{12}$  Hz) a temperatura ambiente.

$$S_n(f) = \frac{\hbar f}{2(\exp(\frac{\hbar f}{kT}) - 1)}.$$

- Para efectos prácticos, el ruido termal puede ser considerado un proceso blanco con espectro de potencia igual a  $\frac{kT}{2}$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura medida en  $^{\circ}K$ .

- El valor  $kT$  se denota normalmente como  $N_0$ .
- La función de autocorrelación de un proceso blanco es

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2}\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau). \quad (21)$$

- A medida que
- Propiedades:
  - 1 El proceso de ruido termal es un proceso estacionario.
  - 2 Un proceso de ruido termal tiene media cero.
  - 3 Un proceso de ruido termal es Gaussiano.
  - 4 Un proceso de ruido termal es un proceso blanco con densidad espectral de potencia

$$S_n(f) = \frac{kT}{2}.$$

- El ruido puede ser filtrado por etapas intermedias de un sistema de comunicaciones o procesamiento de señales.
- Por lo tanto, es posible que el ruido transforme en un proceso pasabandas, es decir, donde la densidad espectral de potencia está ubicada en torno a algún  $f_c \gg 0$ .
- P: Cómo manipulamos un proceso aleatorio pasabanda?
- R: Los caminos muestrales de un proceso pasabanda también son señales pasabanda.

- Sea  $X(t)$  un proceso aleatorio que es la salida de un filtro pasabanda, cuyo ancho de banda es  $W$  y se encuentra centrado en torno a una frecuencia central  $f_c$ .
- Por ejemplo

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} .$$

- El ruido térmico es blanco y Gaussiano, por lo tanto

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} H(f)$$

- Notemos que si  $H(f)$  tiene la expresión del ejemplo, entonces

$$S_X(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} .$$

- Toda señal pasabanda puede ser descrita en términos de componentes **en fase**  $X_c(t)$  y **en cuadratura**  $X_s(t)$ .

- Esto es

$$X(t) = X_c(t) \cos(2\pi f_c t) - X_s(t) \sin(2\pi f_c t).$$

donde  $X_c(t)$  y  $X_s(t)$  son procesos pasabajos.

- Otra manera de expresar  $X(t)$  es en términos de un proceso envolvente  $A(t)$  y un proceso de fase aleatoria  $\Theta(t)$ .

$$X(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta(t)).$$

Ambos procesos  $A(t)$  y  $\Theta(t)$  son pasabajos.

Consideremos una señal de ruido blanco Gaussiano. Si  $X_c(t)$  y  $X_s(t)$  denotan las componentes en fase y en cuadratura de un proceso pasabanda  $X(t)$ , entonces

- 1  $X_c(t)$  y  $X_s(t)$  son procesos de media cero, pasabajos, conjuntamente estacionarios, y conjuntamente Gaussianos.
- 2 Si la potencia del proceso  $X(t)$  es  $P_X$ , la potencia de cada una de las componentes satisface:

$$P_X = P_{X_c} = P_{X_s} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df.$$

3.  $X_c(t)$  y  $X_s(t)$  tienen la misma densidad espectral de potencia, y es

$$S_{X_c}(f) = S_{X_s}(f) = S_X^+(f - f_c) + S_X^-(f + f_c).$$

donde  $S_X^+(f)$  es la parte positiva del espectro de  $X(t)$  y  $S_X^-(f)$  es la parte negativa del espectro.

4. Si  $+f_c$  y  $-f_c$  son ejes de simetría de las frecuencias positivas y negativas en el espectro  $H(f)$ , entonces  $X_c(t)$  y  $X_s(t)$  son independientes.

- Cuando un proceso de ruido blanco Gaussiano pasa a través de un filtro, el proceso de salida sigue siendo Gaussiano, pero en general deja de ser blanco.
- El efecto del filtro altera el espectro de potencia de la salida de acuerdo a

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2.$$

- El contenido de potencia del proceso de salida es

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df.$$

- Definimos el **ancho de banda equivalente del ruido**, denotado por  $B_{neq}$  como

$$B_{neq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2H_{\text{máx}}^2},$$

donde  $H_{\text{máx}}^2$  denota el máximo de  $|H(f)|$ .

- Por lo tanto,

$$P_Y = N_0 B_{neq} H_{\text{máx}}^2. \quad (22)$$

