

EM757 - Seminario de Telecomunicaciones

Capítulo No. 5

Modulación y Demodulación Digital en Banda Base

Patricio Parada - Jorge Silva



Contenidos I

Motivación

Representación Geométrica de Señales

Modulación en Banda Base

- Canales en Banda Base y Pasa Banda

- Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria

- Formas de Onda en Banda Base para Señalización Multinivel

- Pulsos de Nyquist

- Modulación Diferencial

- Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base

- Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base

- Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base

Motivación

Detección en Canales sin Ruido

Contenidos II

Detección en Canales con Ruido

Detección Binaria

Detección Binaria en Canales con Ruido Aditivo Gaussiano

- Detección de Señalización PAM

- Detección de Señalización no Antipodales

Diseño Óptimo de Receptores

- Correladores

- Demodulador de Filtro Adaptado

- Propiedades del Filtro Adaptado

Detectores para Modulación M -aria

Modulación Digital en AWGN

Motivación I

- ▶ Problema: Transmisión de una secuencia digital (binaria por ejemplo) en un canal con ruido aditivo blanco Gaussiano.
- ▶ Es un canal analógico que sirve de modelo para canales de cable y algunos de radio (con línea de visión).
- ▶ El hecho que sea analógico significa que debemos mapear símbolos discretos a un alfabeto de señales continuas.
- ▶ En este capítulo vamos a considerar sólo canales de tipo pasabajos, i.e., donde su respuesta al impulso incluye la frecuencia $f = 0$.
- ▶ Ventaja: no hay necesidad de utilizar una portadora.

Representación Geométrica de Señales I

- ▶ Desarrollaremos una representación geométrica de señales como puntos en un espacio de señales.
- ▶ Ventajas:
 - ▶ Caracterización compacta.
 - ▶ Simplificación del análisis de desempeño.
 - ▶ Canales analógicos pueden modelarse como canales vectoriales.
- ▶ La idea central es la siguiente: representar símbolos digitales mediante señales analógicas. Por ejemplo, si deseamos mapear el par $\{0, 1\}$ necesitamos dos señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ de forma tal que

$$0 \mapsto s_1(t)$$

$$1 \mapsto s_2(t)$$

Este tipo de esquema recibe el nombre de **modulación binaria**.

Representación Geométrica de Señales II

- ▶ Si agrupamos símbolos de mayor largo, por ejemplo, $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{K-1})$, donde $K > 2$ y $b_k \in \{0, 1\}$, entonces necesitaremos $M = 2^K$ señales para poder representar todas las secuencias posibles. Este tipo de esquema se denomina **modulación M -aria**.
- ▶ Si consideramos ahora el conjunto de señales $\{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$, podemos construir un subconjunto de $N \leq M$ de formas de onda ortogonales, donde N es la dimensión del espacio en cuestión.
- ▶ La ventaja de tener este subconjunto, que denominaremos **base del espacio de señales**, es el hecho que podemos encontrar una manera más compacta de representar el espacio de señales, lo que puede simplificar las labores de modulación y demodulación.

Procedimiento de Ortonormalización de G-S I

- ▶ EL procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt permite construir una base de vectores ortogonales unos con otros y de norma 1, a partir de un conjunto cualquiera de vectores.
- ▶ En el caso de señales, utilizaremos la norma 2, esto es, la norma Euclidiana para señales de energía, como medida de distancia. Recordamos la definición:

$$\|s(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}}. \quad (1)$$

Procedimiento de Ortonormalización de G-S II

- Consideremos un conjunto de M señales de energía $\{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$. El procedimiento es el siguiente:

1. Definir

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}. \quad (2)$$

Esto es, $\varphi_1(t)$ es la versión normalizada (de energía 1) de $s_1(t)$.

Procedimiento de Ortonormalización de G-S III

2. Para calcular $\varphi_2(t)$ primero proyectamos $s_2(t)$ en $\varphi_1(t)$:

$$c_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\varphi_1(t)dt.$$

Definimos la señal auxiliar $d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\varphi_1(t)$. Finalmente

$$\varphi_2(t) = \frac{d_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} \quad (3)$$

donde $\mathcal{E}_2$ es la energía de la señal auxiliar $d_2(t)$.

Procedimiento de Ortonormalización de G-S IV

3. En general, la ortogonalización de la señal k -ésima queda definida por los siguientes pasos

$$\varphi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}} \quad (4a)$$

$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \varphi_i(t) \quad (4b)$$

$$\mathcal{E}_k = \int_{-\infty}^{\infty} d_k^2(t) dt \quad (4c)$$

$$c_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) \varphi_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (4d)$$

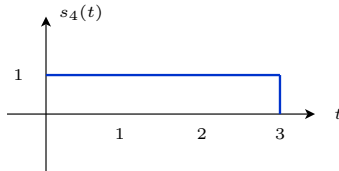
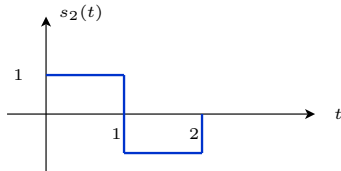
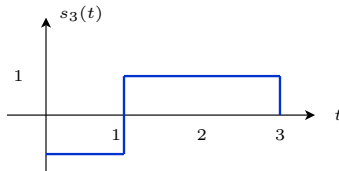
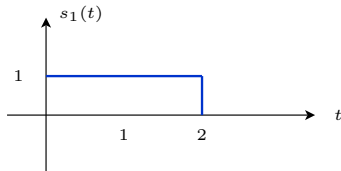
4. Continuar hasta que $k = M$.

- ▶ El proceso de ortogonalización puede entregarnos un conjunto de menor tamaño en caso que algún $d_k(t) = 0$.
- ▶ En este caso no se debe agregar una nueva dimensión.
- ▶ El conjunto de N señales $\{\varphi_i\}$ forma una base ortonormal de un

Ejemplo I

Ejemplo II

Consideremos el conjunto de 4 señales mostrado en la figura



Solución

- Comenzaremos calculando $\varphi_1(t)$:

Representación Geométrica de Señales I

- Una vez que tenemos el conjunto $\{\varphi_i(t)\}$, podemos expresar el conjunto de señales $\{s_m(t)\}$ como una combinación lineal exacta de las señales de la base. Por lo tanto

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \varphi_n(t), \quad m = 1, \dots, M. \quad (5)$$

donde los coeficientes de peso s_{mn} corresponden a las proyecciones de $s_m(t)$ sobre cada $\varphi_n(t)$:

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) \varphi_n(t) dt. \quad (6)$$

Representación Geométrica de Señales II

- La energía de la señal la podemos calcular en términos de los coeficientes de proyección.

$$\mathcal{E}_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt = \sum_{n=1}^N s_{mn}^2. \quad (7)$$

- Notemos que ahora cada señal puede ser representada por un vector en $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbf{s}_m = (s_{m1}, \dots, s_{mN}).$$

y de esta forma, la energía de la señal es la norma Euclidiana de $\mathbf{s}_m$ en el espacio de señales.

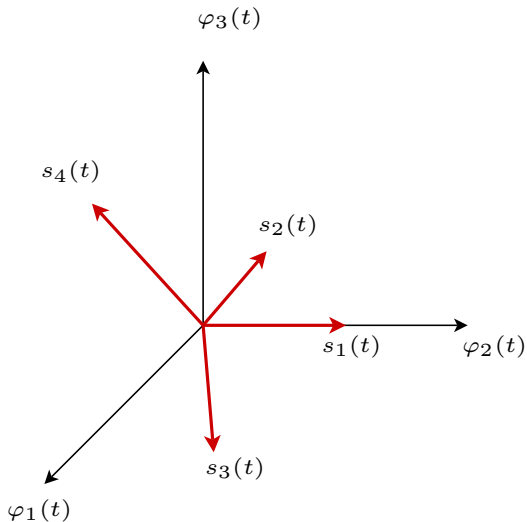
Representación Geométrica de Señales III

- ▶ Además, el producto interno de señales puede ser calculado como el producto interno de sus representaciones vectoriales

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_n(t)dt = \mathbf{s}_m \bullet \mathbf{s}_n.$$

- ▶ Ahora tenemos una representación geométrica para el conjunto de señales.

Representación Geométrica de Señales IV



Motivación I

- ▶ Un canal analógico es un canal cuyas entradas son funciones continuas del tiempo.
- ▶ Un canal banda base es un canal analógico apropiado para transmitir señales cuyo espectro está confinado a un intervalo centrado en $f = 0$.
- ▶ La función de un modulador digital es convertir el flujo de datos digitales en una representación basado en formas de onda que pueda ser aceptado por el canal.
- ▶ El modulador debe
 - ▶ acomodar los datos a las características espectrales del canal,
 - ▶ obtener una alta tasa de transmisión de datos,
 - ▶ minimizar la potencia transmitida,
 - ▶ mantener la tasa de error de bits baja.

Motivación II

- ▶ El desempeño de un modulador no puede ser interpretado en forma separada del de su demodulador.
- ▶ En definitiva, la prueba final que todo diseño debe superar es la habilidad de recuperar los símbolos enviados en la entrada del canal, a partir de la señal recibida en la salida en presencia de ruido, interferencia, distorsión, o cualquier otro impedimento.

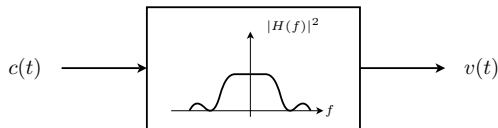
Definiciones I

- Un canal analógico quedará caracterizado por su entrada, una función continua del tiempo denotada por $c(t)$, y su salida, la señal continua del tiempo $v(t)$.
- El canal se dirá lineal si satisface el principio de superposición: si $c(t) \mapsto v(t)$ y $c'(t) \mapsto v'(t)$, entonces para $a, b \in \mathbb{R}$

$$ac(t) + bc'(t) \mapsto av(t) + bv'(t). \quad (8)$$

- Todo canal que sea lineal e invariante en el tiempo (LTI) puede ser descrito mediante un filtro lineal.

Definiciones II



- El comportamiento del filtro queda descrito mediante la respuesta al impulso $h(t)$ y su función de transferencia $H(f)$.
- La salida del canal lineal se puede determinar mediante la convolución de la entrada $c(t)$ y $h(t)$, esto es

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)c(t-s)ds.$$

Definiciones III

- En el dominio de la frecuencia,

$$V(f) = C(f)H(f).$$

- Un **canal de banda base** es un canal lineal $h(t)$ para el cual el soporte de $H(f)$ es un intervalo finito del eje de frecuencias que contiene el 0.
- En la práctica esta condición es relajada de forma de incluir canales cuya respuesta es grande en la vecindad de $f = 0$, y despreciable para frecuencias alejadas del origen.
- Un **canal pasa banda** es un canal lineal donde el soporte de $H(f)$ está confinado a dos intervalos finitos centrados en las frecuencias $+f_0$ y $-f_0$, donde f_0 es grande comparado con el ancho de cada intervalo.

Definiciones IV

- ▶ Esta condición también puede ser relajada y sólo pedir que la magnitud de $H(f)$ se despreciable fuera de los intervalos centrados en $\pm f_0$.
- ▶ En lo que sigue asumiremos que $H(f) = 1$ en la banda de interés, de modo que $H(f)$ es al menos tan ancho como $C(f)$.

Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria I

- Usualmente, vamos a considerar un tren de datos binarios que fluyen a una tasa constante de 1 bit por cada T_b segundos.
- Un **pulso** es una función real $s(t)$ o $As(t)$ cuya energía es

$$\mathcal{E}_p = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (9)$$

o

$$\mathcal{E}_p = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 s^2(t) dt. \quad (10)$$

finita.

Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria II

- ▶ A veces vamos a considerar que $s(t)$ es un pulso sin dimensión física, y por ello necesario considerar en forma explícita el parámetro de dimensiones A .
- ▶ En este caso diremos que $\mathcal{E}_p = A^2$.
- ▶ Una manera simple de modular un tren de datos en un canal analógico es mediante un mapeo entre los datos y una concatenación de pulsos, que llamaremos **forma de onda modulada** o **señal modulada**, descrita por la ecuación

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT) \quad (11)$$

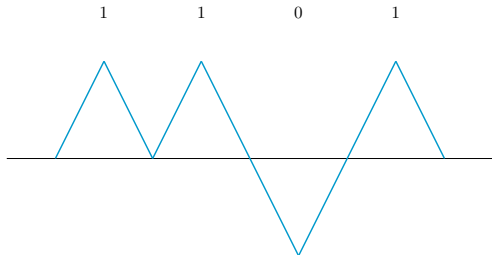
donde a_l depende del l -ésimo bit de datos.

Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria III

- La **señalización antipodal** corresponde a la forma de modulación digital más simple. Si $s(t)$ está normalizada a energía unitaria, entonces definimos

$$a_l = \begin{cases} +A & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 1} \\ -A & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 0.} \end{cases}$$

- Este tipo de señalización también recibe el nombre de **desplazamiento de fase binario** o *binary phase-shift-keyed* (BPSK).



Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria IV

- La **energía por bit transmitido**, denotada por E_b es igual a la energía en el pulso $As(t)$, porque

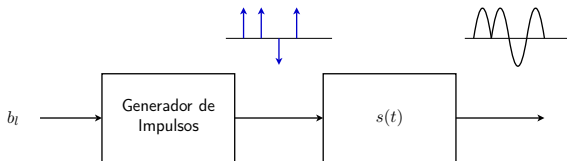
$$E_b = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 s^2(t) dt = A^2 \times 1.$$

- Notemos que la elección de la forma del pulso no es única. La ecuación (11) puede ser utilizada como una manera de realizar una conversión digital/analógica

$$c(t) = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta(t - lT) \right] * s(t)$$

para cualquier pulso $s(t)$.

Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria V



- Otra forma de hacer señalización binaria es mediante la siguiente asignación:

$$a_l = \begin{cases} +A & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 1} \\ 0 & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 0.} \end{cases}$$

- Este esquema recibe el nombre de **desplazamiento on-off binario** o **binary on-off-keyed** (OOK).

Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria VI

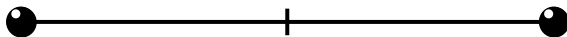
- ▶ Este esquema necesita energía sólo para transmitir 1's; por lo tanto,

$$E_b = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 s^2(t) dt = \frac{1}{2} A^2.$$

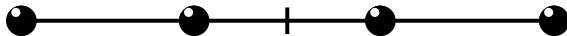
- ▶ En el caso que $s(t)$ es un pulso cuadrado, la codificación OOK recibe el nombre de onda sin retorno a cero (*Nonreturn-to-Zero* o NRZ).
- ▶ Una de las desventajas de NRZ es que, al ser un pulso cuadrado, su respuesta en frecuencia decae lentamente (orden $1/f$), lo que implica que debe utilizar un ancho de banda relativamente grande en comparación con la tasa de datos.

Señalización M -aria I

- ▶ Una manera de realizar la labor de modulación en forma más eficiente corresponde a modular un grupo de bits en cada instante de señalización.
- ▶ En este caso, vamos a hablar de señalización M -aria.
- ▶ Existen dos formas de lograr este objetivo
 - I. Restringiendo el ancho de banda. En este caso se utiliza una única forma de onda $s(t)$ con diversos niveles de amplitud.
 - II. Utilizando una familia de M señales ortogonales. El ancho de banda requerido crece con M .
- ▶ En el primer caso, las **constelación** de señales “vive” en una sola dimensión, tal como apreciamos en la figura

Señalización M -aria II

2-ario



4-ario

- Una constelación de señales es un alfabeto de señales, y usualmente lo vamos a denotar por $\mathcal{S}$.

Señalización M -aria III

- ▶ En general $\mathcal{S} = \{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}\}$ es un conjunto finito de señales, y lo usual va a ser tomar $M = 2^k$, de manera de poder representar todas las secuencias posibles de k bits.
- ▶ En el ejemplo,

$$\mathcal{S}_1 = \{-A, A\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{-3A, -A, A, 3A\}.$$

- ▶ La forma de onda modulada es

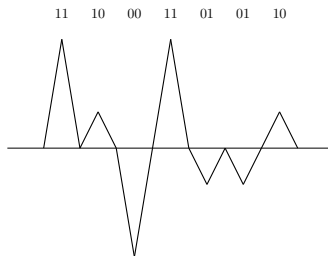
$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT) \quad a_l \in \mathcal{S}. \quad (12)$$

Señalización M -aria IV

- Por ejemplo, si tenemos el siguiente mapeo

$$a_l = \begin{cases} -3A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 00 \\ -A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 01 \\ +A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 10 \\ +3A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 11. \end{cases}$$

entonces la secuencia 11100011010110 genera la siguiente forma de onda



Señalización M -aria V

- ▶ Este tipo de codificación recibe el nombre de **modulación por amplitud de pulsos** (PAM) o modulación por variación de amplitudes (*amplitude-shift keyed* o ASK).
- ▶ Este esquema permite transmitir k bits de datos en T segundos utilizando una constelación de 2^k señales reales.

Cálculo de Energías I

- ▶ La elección de la forma del pulso puede ser cambiada a una que utilice menos potencia o menos ancho de banda.
- ▶ La energía promedio por símbolo de la constelación $\{c_0, c_1, \dots, c_M\}$, con $M = 2^k$, es

$$E_c = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} c_m^2 \quad (13)$$

donde hemos asumido que todas las señales son equiprobables, y c_m^2 es la energía de la m -ésima señal.

- ▶ Considerando que hay $k = \log_2 M$ bits en cada símbolo, la energía promedio por bit de la constelación de señales es

$$E_b = \frac{E_c}{k}.$$

Cálculo de Energías II

- La energía esperada en un bloque de L símbolos es

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^L a_l s(t - lT) dt \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l'=0}^L \sum_{l=0}^L \mathbb{E}[a_l a_{l'}] s(t - lT) s(t' - l'T) dt dt'.$$

- Si la secuencia de datos es máximamente aleatoria, esto es, todas las secuencias son equiprobables, y los símbolos son independientes, entonces

$$\mathbb{E}[a_l a_{l'}] = E_c \delta_{ll'}.$$

- Si la energía del pulso $s(t)$ es 1, la energía promedio en un bloque de L símbolos es LE_c .

Cálculo de Energías III

- Por ejemplo, en la constelación 4-aria antes vista,

$$E_c = \frac{1}{4}[(-3A)^2 + (-A)^2 + A^2 + (3A)^2] = 5A^2.$$

Como se representan dos símbolos en cada señal, entonces la energía promedio por bit es $5A^2/2$.

Pulsos de Nyquist I

- ▶ Hasta el momento hemos visto varios ejemplos de señalización que permite modular una secuencia binaria en formas de onda analógica.
- ▶ En general, la operación de conversión digital/análogo se puede interpretar como la convolución de un tren de impulsos de altura a_l y una señal $s(t)$, ello es

$$c(t) = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta(t - lT) \right] * s(t).$$

- ▶ También hemos mencionado que la elección de la forma de onda $s(t)$ obedece a ciertas restricciones de ancho de banda o potencia disponible.

Pulsos de Nyquist II

- ▶ En esta sección vamos a derivar un criterio general para la selección del pulso básico $s(t)$.
- ▶ El objetivo final de todo esquema de modulación/demodulación es la recuperación de los símbolos a_l de la señal $c(t)$.
- ▶ Si $l = l'T$ tenemos

$$c(lT) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} a_{l'} s(lT - l'T) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} a_{l'} s((l - l')T).$$

- ▶ Notemos que si $s((l - l')T) = \delta_{ll'}$, entonces $c(lT) = a_l$.

Pulsos de Nyquist III

- Por lo tanto, si tenemos que $s((l - l')T) \neq 0$ para algún $l \neq l'$, el símbolo recibido mostrará la superposición de dos símbolos. En este caso decimos que existe **interferencia intersimbólica**, él que en la práctica es un efecto que resulta indeseable.

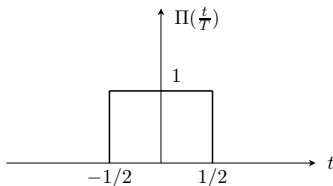
Definición

Un **pulso de Nyquist** para un intervalo de señalización T , es un pulso $s(t)$ que satisface

$$s(lT) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0. \end{cases}$$

Pulsos de Nyquist IV

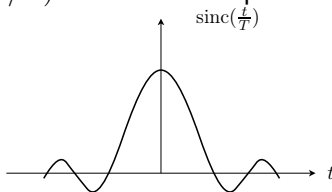
- El pulso $s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ es un pulso de Nyquist porque $s(lT) = \Pi\left(\frac{lT}{T}\right) = 0$ para $l \neq 0$.



El pulso rectangular $\Pi(t/T)$ utiliza un ancho de banda bastante grande en comparación con la tasa de datos, por lo que en general no se utiliza cuando el ancho de banda es un recurso escaso.

Pulsos de Nyquist V

- El pulso $s(t) = \text{sinc}(t/T)$ es también un pulso de Nyquist.



Notemos que $\text{sinc}(lT) = \frac{\sin(\pi lT/T)}{\pi lT/T} = \frac{\sin(\pi l)}{\pi l} = 0$ si $l \neq 0$, y $s(0) = 1$. Este pulso tiene varios inconvenientes que la hacen inadecuada para aplicaciones prácticas:

- (a) Duración infinita.
- (b) Decaimiento lento comparado con $c(t)$.

Pulsos de Nyquist VI

- (c) Lóbulos laterales pueden reforzarse para producir una amplitud momentánea de $c(t)$ muy grande en instantes que no son múltiplos de T .
- (d) El efecto anterior puede hacer que los cruces por cero sean demasiado pronunciados, por lo que el sistema podría salir de sincronía.

En la Búsqueda de Buenos Pulsos

- ▶ Los pulsos $\Pi(t/T)$ y $\text{sinc}(t/T)$ se encuentran en dos extremos: el primero utiliza una gran porción del espectro de frecuencias, mientras que el segundo una gran porción del eje temporal.
- ▶ El diseño de buenos pulsos evita ambos extremos.
- ▶ Un buen pulso tiene utiliza un porción reducida del espectro de frecuencia y, a la vez, tienen lóbulos laterales que decaen rápidamente en el eje del tiempo.
- ▶ El siguiente teorema, denominado **Criterio de Nyquist**, proporciona un criterio de diseño de pulsos en el dominio de la frecuencia, y que previene la aparición de interferencia intersimbólica.

Criterio de Nyquist I

Teorema

El pulso $s(t)$ es un pulso de Nyquist si y sólo si su transformada de Fourier $S(f)$ satisface

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(f + \frac{k}{T}\right) = 1 \quad |f| \leq \frac{1}{2T}. \quad (14)$$

- La idea central de este teorema es que un pulso de Nyquist es una señal que puede tener un espectro con “colas”, pero que al superponerse con la siguiente banda.
- La demostración de este resultado se puede realizar en dos pasos.

Demostración del Inverso I

- Primero demostraremos que si una señal $s(t)$ satisface (14), entonces es un pulso de Nyquist. Esto quiere decir que debemos comprobar que

$$s(lT) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0. \end{cases}$$

Demostración del Inverso II

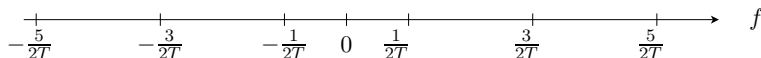
- Notemos que si por la fórmula de la transformada inversa de Fourier tenemos

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$
$$\Rightarrow s(lT) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi flT} df$$

Demostración del Inverso III

- Si partimos el intervalo de frecuencias en segmentos de largo $1/T$ entonces tenemos que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2n-1}{2T}, \frac{2n+1}{2T} \right]$$



Demostración del Inverso IV

y por lo tanto, podemos reescribir la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2n-1}{2T}}^{\frac{2n+1}{2T}}$$

esto es

$$s(lT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2n-1}{2T}}^{\frac{2n+1}{2T}} S(f) e^{j2\pi flT} df.$$

Demostración del Inverso V

- Hacemos el cambio de variables $f \mapsto \nu + \frac{n}{T}$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{2T} &\mapsto \nu_a = \frac{2n-1}{2T} - \frac{n}{T} = -\frac{1}{2T} \\ \frac{2n+1}{2T} &\mapsto \nu_b = \frac{2n+1}{2T} - \frac{n}{T} = +\frac{1}{2T} \\ df &= d\nu\end{aligned}$$

Demostración del Inverso VI

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 s(lT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S\left(\nu + \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi\left(\nu + \frac{n}{T}\right)lT} d\nu \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\nu + \frac{n}{T}\right) \underbrace{e^{j2\pi n l}}_1 \right] e^{j2\pi \nu l T} d\nu \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} T e^{j2\pi \nu l T} d\nu
 \end{aligned}$$

Demostración del Inverso VII

donde (a) viene de que podemos intercambiar integral con sumatoria, y (b) de la aplicación de (14).

► Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 s(lT) &= T \left\{ \frac{e^{j2\pi\nu lT}}{j2\pi lT} \Big|_{+\frac{1}{2T}} - \frac{e^{j2\pi\nu lT}}{j2\pi lT} \Big|_{-\frac{1}{2T}} \right\} \\
 &= \frac{e^{j\pi T} - e^{-j\pi T}}{j2} \frac{1}{\pi l} \\
 &= \text{sinc}(\pi l) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

es decir, la señal $s(t)$ es un pulso de Nyquist.

Implicancia Directa I

- La implicancia directa corresponde a demostrar que si la señal $s(t)$ es un pulso de Nyquist, entonces se cumple (14).
- El procedimiento es similar lo hecho para la implicancia en la dirección inversa. Sabemos que

$$\begin{aligned}
 s(lT) &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\nu + \frac{n}{T}) \underbrace{e^{j2\pi n l}}_1 \right] e^{j2\pi \nu l T} d\nu \\
 &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S'(\nu) e^{j2\pi \nu l T} d\nu
 \end{aligned}$$

Implicancia Directa II

- Notemos que esto nos dice que existe una función

$$S'(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\nu + \frac{n}{T})$$

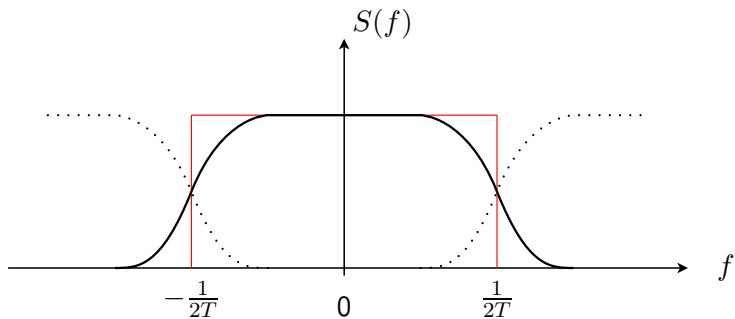
que es periódica en ν y cuyo desarrollo en serie de Fourier tiene un solo elemento no nulo ($s'(0) = 1/T$). Por lo tanto,

$$\frac{S'(\nu)}{T} = s(0) = 1$$

es decir,

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f + \frac{n}{T}) = 1.$$

Implicancia Directa III



Observaciones sobre el Criterio de Nyquist

- Si la señal $s(t)$ tiene un ancho de banda W , esto es, si $S(f) = 0$ para $|f| > W$, la suma infinita sobre $S(f + \frac{n}{T})$ puede ser reemplazada por una suma finita, esto es

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N S\left(f + \frac{n}{T}\right) = 1 \quad \text{para } |f| \leq \frac{1}{2T} \quad (15)$$

donde $N = \lfloor 2TW \rfloor$.

- Si $\frac{W}{2} < \frac{1}{2T} < W$, $N = 1$.

La Familia de Pulsos de Coseno Alzado I

- La familia de **pulsos de coseno-alzado** (*raised-cosine pulse*) corresponde a una familia paramétrica de pulsos de Nyquist, cuyo espectro es una función definida como

$$S(f) = \begin{cases} T & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \sin \frac{\pi T(|f| - 1/2T)}{\alpha} \right] & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| \geq \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (16)$$

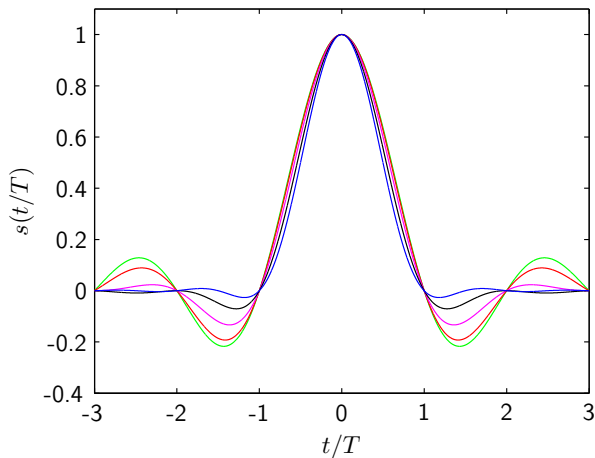
donde el parámetro α varía entre 0 y 1.

La Familia de Pulsos de Coseno Alzado II

- El correspondiente pulso tiene la forma

$$s(t) = \text{sinc}(t/T) \frac{\cos \alpha \pi t/T}{1 - 4\alpha^2 t^2/T^2}. \quad (17)$$

La Familia de Pulsos de Coseno Alzado III



Modulación Diferencial I

- ▶ Existe una convención alternativa para pasar de bits a formas de onda analógica.
- ▶ La idea es mandar un “1” sólo cuando la secuencia original de datos $\{b_l\}$ cambie de valor de “0” a “1” o viceversa.
- ▶ Matemáticamente esta idea puede ser expresada como sigue:

$$a_l = 0 \text{ si } b_l = b_{l-1}$$

$$a_l = A \text{ en otro caso.}$$

- ▶ Esta forma se denomina NRZI (I: inverse) y la señal modulada es

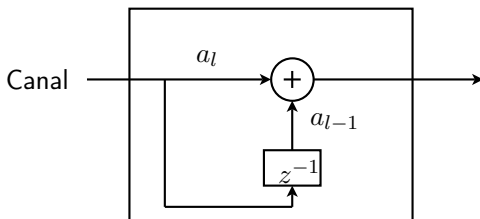
$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT).$$

Modulación Diferencial II

- ▶ Este esquema requiere un bit de referencia inicial.
- ▶ Este tipo de proceso nos recuerda de un proceso de diferenciación de la entrada, y se da en forma natural en medios magnéticos.
- ▶ Si este proceso es inherente al medio, debemos utilizar un esquema de modulación apropiado.
- ▶ Notemos que si el modulador envía a_l , el demodulador lo interpretará como una secuencia NRZ en lugar de NRZI.
- ▶ La situación complementaria ocurre si el modulador envía los datos como NRZ pero son recuperados como NRZI.
- ▶ En cualquier caso necesitamos un dispositivo extra para poder compensar por el efecto “diferencial”, de manera de transformar los datos a su forma original.

Modulación Diferencial III

- La transformación de NRZ a NRZI se puede realizar en el modulador utilizando un **pre-codificador**, que de manera preemptiva modifica la secuencia NRZ para ser transformada de vuelta por el canal.
- La otra alternativa es utilizar un **codificador posterior o post-coder** a continuación del demodulador.

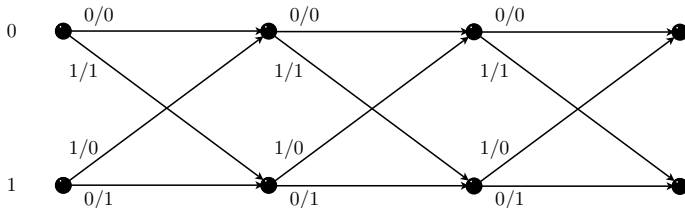


Postcoder NRZI

Representación Via Retículas

- ▶ Canales con memoria son usualmente representados en forma gráfica utilizando una **retícula** o **trellis**.
- ▶ La retícula es un grafo formado por
 - ▶ **nodos**: que representan los posibles estados de la señal en el instante anterior.
 - ▶ **arcos**: que indican las posibles transiciones de un instante al siguiente.

Estado



Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base I

- Podemos definir un nuevo tipo de señalización binaria utilizando dos pulsos ortogonales $s_1(t)$ and $s_2(t)$.
- Recordemos que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son ortogonales si y sólo si

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = 0.$$

- En señalización en banda base $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son señales reales.

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base II

- Vamos a requerir también que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean pulsos de Nyquist, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t - lT) dt = 0$$

para cualquier entero l .

- La modulación de la señal en el canal es

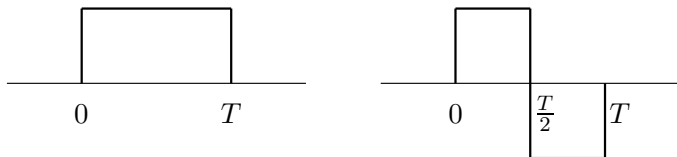
$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [a_l s_1(t - lT) + \bar{a}_l s_2(t - lT)] \quad (18)$$

donde

$$(a_l, \bar{a}_l) = \begin{cases} (A, 0) & \text{si el } l\text{-ésimo bit de datos es 0.} \\ (0, A) & \text{si el } l\text{-ésimo bit de datos es 1.} \end{cases}$$

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base III

- ▶ Este tipo de señal se denomina **señalización binaria ortogonal**.
- ▶ Ejemplos

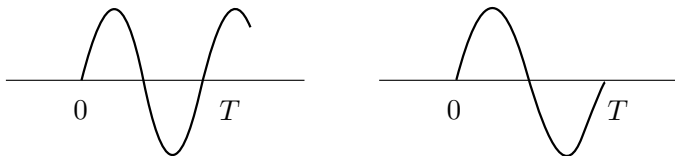


- ▶ $s_1(t) = \sin 2\pi f_1 t$; $s_1(t) = \sin 2\pi f_2 t$, con $0 \leq t \leq T$. En este caso,

$$\int_0^T \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_1 t) dt = 0$$

y

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base IV



Nos aseguramos que las señales sean ortogonales eligiendo $f_1 = \frac{m}{2T}$ y $f_2 = \frac{m'}{2T}$, donde m y m' son enteros positivos distintos.

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base V

- ▶ Cuando f_1 y f_2 son muy grandes en comparación con $1/T$, el esquema puede ser entendido como una señal pasabanda. En este caso, el esquema recibe el nombre de **Codificación Binaria por Desplazamientos de Frecuencias** o *Binary Frequency-Shift Keying* (FSK).

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base I

- ▶ Este esquema es apropiado para señalización en canales con potencia limitada, y son el análogo de la modulación M -aria por amplitud de pulsos empleada en canales con ancho de banda limitada.
- ▶ Existen dos alfabetos de señales para este tipo de señalización:
 - ▶ de pulsos ortogonales
 - ▶ simplex de pulsos.
- ▶ Aunque se pueden utilizar señales no ortogonales, ellas son más difíciles de distinguir en presencia de ruido.

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base II

Definición

Un alfabeto de señalización ortogonal M -ario es un conjunto de M pulsos $s_m(t)$, con $m = 0, 1, \dots, M - 1$, que tiene las propiedades de energía y ortogonalidad enunciadas a continuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_n(t)dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (19)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_n(t - lT)dt = 0, \quad l \neq 0. \quad (20)$$

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base III

- ▶ Lo usual es elegir $s_m(t)$ con soporte en $[0, T]$, de forma que la segunda condición se cumple en forma trivial.
- ▶ Además, el mapeo se realiza entre secuencias binarias de largo k , de forma que uno fija $M = 2^k$.
- ▶ En el instante $t = lT$, la modulación asigna al símbolo $a_l = m$ la señal $s_m(t - lT)$.
- ▶ Un modulador M -ario es un dispositivo que, luego de recibir $a_l = m$, produce la señal $s_m(t)$ y la envía a través de un canal analógico.
- ▶ La transmisión de secuencias de bits se hace agrupando bloques o palabras de largo k .
- ▶ La l -ésima palabra m_l es mapeada a la señal $s_{m_l}(t)$.

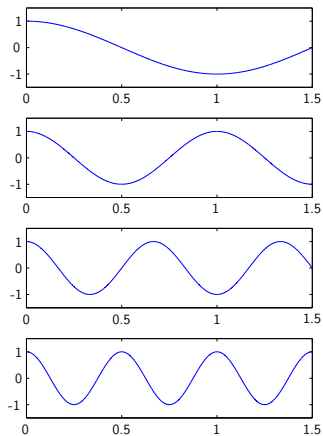
Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base IV

- La señal transmitida finalmente es

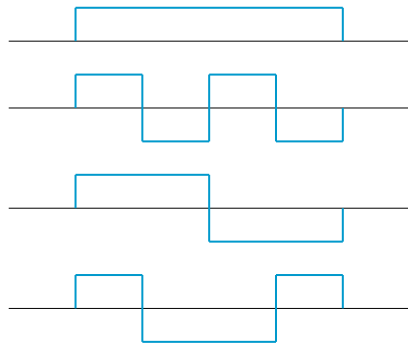
$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_{m_l}(t - lT).$$

- El demodulador asociado a este esquema toma una la señal recibida ($r(t) = c(t) + n(t)$) y produce la estimación $\hat{m}_l$ del número m_l .
- El sistema completo de modulador/canal/demodulador constituye un canal de tiempo discreto y de entrada finita.
- Si $\hat{m}_l \neq m_l$ diremos que el demodulador ha cometido un error en $t = lT$.

Ejemplos I



FSK 4-ario.



CSK 4-ario.

Ejemplos II

- ▶ En la figura se presentan dos esquemas de señalización ortogonal 4-aria.
- ▶ Codificación por desplazamiento de frecuencias o FSK (Frequency Shift Keying)
- ▶ Codificación por desplazamiento de códigos o CSK (Code Shift Keying).
- ▶ Lo usual es utilizar familias de códigos con un número mayor de elementos (usualmente con M igual a 32 ó 64).
- ▶ Todos estos tipos de alfabetos reciben el nombre colectivo de MFSK o MCSK.

Energía por Símbolo

- ▶ Vamos a denotar por E_p la energía total transmitida en una palabra de largo

$$k = \log_2 M \text{ bits.}$$

- ▶ La energía por bit es

$$E_b = \frac{E_p}{k} = \frac{E_p}{\log_2 M}. \quad (21)$$

- ▶ Es preferible utilizar esta segunda noción porque estandariza todas las familias de alfabetos y permite estudiar su desempeño.

Alfabeto Simplex de Pulsos I

- El alfabeto **simplex** de pulsos es una construcción especial basada en una familia ortogonal $\{s_0(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$, donde cada pulso tiene energía E_p .
- La familia M -aria simplex de pulsos es cualquier conjunto de M pulsos $q_m(t)$ con la misma energía E_q que satisfacen que la correlación entre dos pulsos distintos es

$$-\frac{E_q}{M-1}.$$

Alfabeto Simplex de Pulsos II

- Los pulsos $q_m(t)$ del simplex se definen como sigue:

$$q_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} s_m(t) \quad (22)$$

donde hemos substraído la energía promedio del conjunto original a cada señal.

- La energía del simplex es

$$E_q = \int_{-\infty}^{\infty} |q_m(t)|^2 dt = \left(1 - \frac{1}{M}\right) E_p$$

Alfabeto Simplex de Pulsos III

- El conjunto $\{q_0(t), \dots, q_{M-1}(t)\}$ no es ortogonal. En lugar de ello, presenta la propiedad más fuerte de correlación negativa. Esto es, para $m \neq m'$ la correlación entre $q_m(t)$ y $q_{m'}(t)$ es

$$\langle q_m(t), q_{m'}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} q_m(t) q_{m'}(t) dt = -\frac{E_p}{M} = -\frac{E_q}{M-1}. \quad (23)$$

- En la última parte del curso vamos a demostrar que la familia simplex tiene el mismo desempeño de una familia de señales ortogonales, pero utiliza menos energía.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base I

- Hay dos situaciones que analizar. La primera corresponde al caso en que uno quiere enviar una secuencia determinística de datos de longitud finita.
- En este caso, la señal modulada es

$$c(t) = \sum_{l=0}^n a_l s(t - lT)$$

tiene energía finita y, por lo tanto, transformada de Fourier.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base II

- Utilizando el teorema de delay para T. de F. tenemos

$$\begin{aligned}C(f) &= S(f) \sum_{l=0}^n a_l e^{-j2\pi flT} \\ &= S(f)A(f).\end{aligned}$$

- El espectro $C(f)$ se puede factorizar en $S(f)$, que recibe el nombre de **factor de forma de pulso**, y $A(f)$ que se denomina el **factor de arreglo**.
- $A(f)$ depende de los datos enviados, por lo tanto, no podemos conocer el espectro sin conocer los datos. En general, $A(f)$ es aleatorio.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base III

- Por otro lado, si uno desea enviar una secuencia infinitamente larga, la señal modulada

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT)$$

tiene energía infinita.

- En este caso no podemos calcular la transformada de Fourier. Si a ello agregamos el hecho que la secuencia $\{a_l\}$ es desconocida, debemos utilizar otras herramientas de análisis.
- En particular, si n es grande y $\{a_l\}$ es aleatorio, entonces el efecto de $A(f)$ no debería ser muy relevante, y $|C(f)|$ debería tener una forma similar a $|S(f)|$.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base IV

- ▶ La descripción del contenido espectral de $c(t)$ se hará mediante su densidad espectral de potencia.
- ▶ Lamentablemente, $c(t)$ no es un proceso estacionario en general, y por ello uno considera el proceso

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT - \alpha) \quad (24)$$

donde α es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0, T]$.

- ▶ La incorporación de este delay aleatorio representado por α transforma el proceso $c(t)$ en estacionario.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base V

- La densidad espectral de $c(t)$ es $\Phi_c(f)$ y su valor es

$$\Phi_c(f) = \frac{1}{T} |S(f)|^2. \quad (25)$$

- Vemos que el ancho de banda utilizado por $c(t)$ es el mismo utilizado por el pulso $s(t)$.

Demodulación Digital en AWGN

Algo de Léxico I

- ▶ La demodulación digital de señales corresponde al proceso inverso al realizado por el modulador, y por lo tanto, toma pulsos o señales analógicas, y las convierte en secuencias de símbolos.
- ▶ En la literatura, este proceso se encuentra bajo diferentes nombres:
 - ▶ detección,
 - ▶ toma de decisiones,
 - ▶ test de hipótesis,
 - ▶ decodificación.
- ▶ La palabra **detección** se utiliza para determinar la ocurrencia de un determinado fenómeno basado en un conjunto de observaciones (por ejemplo, en un sistema de radar, sistemas de control de calidad, pruebas médicas, etc).

Algo de Léxico II

- ▶ En el ámbito de comunicaciones digitales, el problema de demodulación corresponde a determinar si una señal ha sido o no enviada.
- ▶ El término **toma de decisión** se reserva para cuando el dispositivo debe determinar un opción entre dos.
- ▶ El término **test de hipótesis** tiene una acepción similar a la de toma de decisión, excepto que involucra un número mayor de opciones.
- ▶ Finalmente, la palabra **decodificación** se refiere al mismo problema pero interpretando la señal recibida como una palabra de código en lugar de una señal propiamente tal.

Detección en Canales sin Ruido I

- ▶ Vamos a comenzar nuestro estudio considerando la demodulación de secuencias digitales en el caso de canales sin ruido.
- ▶ Estas condiciones las hemos estudiado en forma parcial cuando propusimos el criterio de Nyquist para selección de pulsos de forma.
- ▶ En general, el problema de demodulación corresponde a la recuperación de la secuencia $\{a_l\}$ a partir de la señal

$$r(t) = c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT)$$

donde $s(t)$ es un pulso de Nyquist.

- ▶ Esto se logra “filtrando” $c(t)$ con un filtro $q(t)$ adecuado.

Detección en Canales sin Ruido II

- Definamos la salida del filtro demodulador como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau)q(t - \tau)d\tau. \quad (26)$$

- Nuestro objetivo es determinar reglas para determinar $q(t)$ a partir de $s(t)$ de forma que

$$y(lT) = a_l \quad (27)$$

Detección en Canales sin Ruido III

- Reemplazando la expresión para $c(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(\tau - lT) q(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - lT) q(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) q(t - lT - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g(t - lT)
 \end{aligned}$$

Detección en Canales sin Ruido IV

donde $g(t)$ es la respuesta del filtro.

- Por lo tanto,

$$y(l'T) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g((l' - l)T)$$

- En el caso que no hay ruido, la selección obvia de

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0. \end{cases}$$

para así evitar interferencia intersimbólica.

Detección en Canales sin Ruido V

- Esto implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)q((l' - l)T - \tau)d\tau = \delta_{ll'}$$

- Si $l = l'$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)q(-\tau)d\tau = 1$$

Detección en Canales sin Ruido VI

- Como $s(t)$ tiene soporte en $[0, T]$, una forma en que esta ecuación tenga solución es elegir $q(t) = s(-t)$. En ese caso tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(\tau)d\tau = 1$$

dado que el pulso $s(t)$ se elige con energía igual a 1.

- Esta elección funciona también para $l \neq l'$, pues la señal $s(t)$ debe ser ortogonal a sus desplazamientos en el tiempo.
- Por lo tanto, una buena elección para $q(t) = s(-t)$. Este filtro recibe el nombre de **filtro adaptado** o **matched filter**.

Detección en Canales sin Ruido VII

- Esta solución para demodulación resulta bastante más general que lo visto hasta este momento; revisitaremos este tema una vez visto algunas técnicas de detección estadística.

Detección en Canales con Ruido I

- ▶ El problema de detección que vamos a estudiar es el siguiente. Para ello utilizaremos un enfoque probabilístico.
- ▶ Vamos a considerar primero que existe un número finito de posibles mensajes, y por lo tanto, un número finito de hipótesis asociadas a cada uno de ellos.
- ▶ Estos eventos son mutuamente excluyentes (es decir, no pueden ocurrir dos en forma simultánea) y comprensivos (abarcen todo el espacio de posibles resultados)
- ▶ Consideremos que un problema de detección queda definido por M hipótesis $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$.

Detección en Canales con Ruido II

- ▶ Si c representa la salida del transmisor, entonces, ésta define una variable aleatoria C que, para cada m , toma el valor h_m con probabilidad $P_C(h_m)$. Esta es la *probabilidad a-priori* que la hipótesis h_m sea verdadera.
- ▶ Para poder tomar decisiones, uno aprovecha las observaciones realizadas por el receptor, que denotaremos por una segunda variable aleatoria R .
- ▶ Nuestra intención es utilizar las mediciones por el receptor para determinar el cuál de las M hipótesis tiene la mayor probabilidad de ser la correcta.

Detección en Canales con Ruido III

- Por ejemplo, consideremos el caso de detección binaria. En este caso, existen dos posibles hipótesis:

$$h_0 : a_l = -A$$

$$h_1 : a_l = +A$$

- Supongamos que $P(a_l = +A) = 2/3$, y $P(a_l = -A) = 1/3$.
Simplemente decidir en favor de h_0 sin importar la observación puede llevarnos a una detección incorrecta del símbolo.
- Podría ser que la probabilidad de el símbolo $P(r_l > 0) = 0,9$ y que $P(r_l \leq 0) = 0,1$. Entonces las observación del símbolo puede alterar el criterio de decisión.

La regla MAP I

- ▶ Existen diversos criterios para tomar decisiones. El primero que vamos a considerar es el de **maximizar la probabilidad de hacer la elección correcta** basado en las observaciones que se hagan en el receptor.
- ▶ Ello significa que necesitamos definir una regla (o reglas) de decisión que asignen $\bar{c}(r) = h_m$ si h_m es correcta.
- ▶ En la práctica, la regla de decisión es el argumento que maximiza las probabilidades condicionales $P_{C|R}(h_m|r)$, esto es

$$\bar{c}(r) = \operatorname{argmax}_m P_{C|R}(h_m|r) \quad (28)$$

- ▶ Este criterio de decisión se conoce como la **regla MAP** o regla de máximo a-posteriori.

La regla MAP II

- ▶ La regla MAP requiere de ciertas condiciones para poder ser aplicada:
 - ▶ Se conocen las probabilidades a priori de cada hipótesis.
 - ▶ El criterio de maximizar la probabilidad de decisión correcta es adecuado para el problema. Si existe un costo demasiado alto por cometer errores, entonces esta regla no entrega un criterio de decisión apropiado. Sin embargo, con pequeñas modificaciones se puede derivar una regla que resuelva este nuevo criterio.

Detección Binaria I

- ▶ Consideremos un modelo de probabilidad donde H es una variable binaria que toma uno de dos valores posibles $\{h_0, h_1\}$, con probabilidades a-priori p_0 y p_1 .
- ▶ En el contexto de comunicaciones es usual fijar $p_0 = p_1 = 1/2$, y en general, equiprobable si hay más de dos mensajes posibles.
- ▶ Sea R una variable aleatoria cuya densidad probabilidad condicional dado H es

$$0 < f_{R|H}(r|h_m) < \infty, m \in \{0, 1\}.$$

- ▶ La función $f_{R|H}(r|h_m)$ recibe el nombre de **verosimilitud** (*likelihood*) en la jerga de test de hipótesis.

Detección Binaria II

- La densidad marginal de R es

$$f_R(r) = f_{R|H}(r|h_0)p_0 + f_{R|H}(r|h_1)p_1$$

- Por lo tanto, la probabilidad a posteriori de H es

$$f_{H|R}(h_m|r) = \frac{p_m f_{R|H}(r|h_m)}{f_R(r)}$$

- La regla de maxima probabilidad a posteriori puede ser enunciada como sigue:

Si $f_{H|R}(h_0|r) \geq f_{H|R}(h_1|r)$ decidir h_0

Si $f_{H|R}(h_0|r) < f_{H|R}(h_1|r)$ decidir h_1

Detección Binaria III

- Notemos que podemos eliminar $f_R(r)$ de ambas ecuaciones para obtener

Si $f_{R|H}(r|h_0)p_0 \geq f_{R|H}(r|h_1)p_1$ decidir h_0

Si $f_{R|H}(r|h_0)p_0 < f_{R|H}(r|h_1)p_1$ decidir h_1

- Definiendo la razón de verosimilitudes

$$\Lambda(r) = \frac{f_{R|H}(r|h_0)}{f_{R|H}(r|h_1)} \quad (29)$$

Detección Binaria IV

entonces la regla MAP se escribe como

Si $\Lambda(r) \geq \eta$ decidir h_0

Si $\Lambda(r) < \eta$ decidir h_1

donde $\eta = p_1/p_0$ es el *umbral de decisión*.

- En el caso que $p_0 = p_1 = 1/2$ la regla se se reescribe como

Si $\Lambda(r) \geq 1$ decidir h_0

Si $\Lambda(r) < 1$ decidir h_1

y recibe el nombre especial de criterio o **regla de máxima verosimilitud**.

Desempeño del Detector Binario I

- ▶ La **probabilidad de error** es la medida de desempeño más utilizada para evaluar el trabajo de un detector (independiente de si es binario o no).
- ▶ Se define como

$$p_e \equiv \Pr\{\text{Error}\} = 1 - \Pr\{h_m \text{ es correcto}\}. \quad (30)$$

- ▶ Podemos encontrar una expresión en términos de las probabilidades condicionales:

$$p_e = p_0 \Pr\{e|H = h_0\} + p_1 \Pr\{e|H = h_1\}$$

Desempeño del Detector Binario II

- ▶ Ambas probabilidades condicionales reciben nombres especiales dependiendo del campo de aplicación.
- ▶ En radares, el término $\Pr\{e|H = h_0\}$ se denomina probabilidad de falsa alarma, y $\Pr\{e|H = h_1\}$ probabilidad de pérdida.
- ▶ En estadística, el término $\Pr\{e|H = h_0\}$ se denomina probabilidad de error de primera especie, y $\Pr\{e|H = h_1\}$ probabilidad de error de segunda especie.
- ▶ La regla MAP binaria particiona el espacio de observaciones en dos regiones:

$$\mathcal{R}_0 = \{r | \Lambda(r) \geq \eta\}$$

$$\mathcal{R}_1 = \{r | \Lambda(r) < \eta\}$$

Desempeño del Detector Binario III

- Ocurrirá un error de detección si pasa lo siguiente:

$$H = h_0 \text{ y } r \in \mathcal{R}_1$$

$$H = h_1 \text{ y } r \in \mathcal{R}_0.$$

- Por lo tanto,

$$\Pr\{e|H = h_0\} = \int_{\mathcal{R}_1} f_{R|H}(r|h_0)dr, \quad (31)$$

$$\Pr\{e|H = h_1\} = \int_{\mathcal{R}_0} f_{R|H}(r|h_1)dr. \quad (32)$$

Detección de Señales PAM I

- Considere un esquema modulación PAM del tipo

$$A_l \in \{-a, a\}$$
$$C(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l s(t - lT)$$

para algún pulso de Nyquist $s(t)$.

Detección de Señales PAM II

- Suponga que la señal recibida por el receptor es

$$R(t) = C(t) + N(t) \quad (33)$$

donde $n(t)$ es un proceso de ruido blanco aditivo Gaussiano de potencia $N_0/2$. Ello es,

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\left(-\frac{n^2}{N_0}\right).$$

- Consideremos que el sistema previene interferencia intersimbólica, de modo que podemos estudiar el problema como si fueran sólo variables aleatorias en lugar de procesos; ello significa que consideramos

$$R = C + N$$

Detección de Señales PAM III

- Pero C puede tomar sólo dos valores: $+a$ o $-a$. Por lo tanto

$$R = +a + N$$

o bien

$$R = -a + N$$

dependiendo de si $C = a$ o $C = -a$.

Detección de Señales PAM IV

- Las densidades condicionales son entonces:

$$f_{R|H}(r|+a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{N_0}\right)$$

y

$$f_{R|H}(r|-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\left(-\frac{(r+a)^2}{N_0}\right)$$

Detección de Señales PAM V

- La razón de verosimilitud es

$$\begin{aligned}\Lambda(r) &= \frac{f_{R|H}(r|+a)}{f_{R|H}(r|-a)} \\ &= \exp\left(\frac{-(r-a)^2 + (r+a)^2}{N_0}\right) \\ &= \exp\left(\frac{4ra}{N_0}\right)\end{aligned}$$

Detección de Señales PAM VI

- Notemos que podemos calcular el logaritmo de $\Lambda(r)$ para obtener una regla aun más simple:

$$\log(\Lambda(r)) = \frac{4ra}{N_0}$$

por lo tanto definimos la regla MAP como sigue:

$$\text{Si } r \geq \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} \text{ decidir } a_l = a$$

$$\text{Si } r < \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} \text{ decidir } a_l = -a.$$

Detección de Señales PAM VII

- La probabilidad de error, dado que $C = -a$ corresponde a la probabilidad que

$$r \geq \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a},$$

o equivalentemente que

$$n = r - c > \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} + a. \quad (34)$$

- Dado que N es una variable aleatoria Gaussiana, podemos expresar esta probabilidad en términos de la función $Q(\cdot)$

Detección de Señales PAM VIII

- Recordar que

$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

- Debemos reescalar $N(t)$ de modo que sea $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Ello se logra definiendo $N/\sqrt{N_0/2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Pr\{e|C = -a\} &= \Pr\left\{\frac{N}{\sqrt{N_0/2}} > \frac{\sqrt{N_0/2} \log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\right\} \\ &= Q\left(\frac{\sqrt{N_0/2} \log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\right)\end{aligned}$$

Detección de Señales PAM IX

- La probabilidad de error que para el caso $H = +a$ se calcula siguiendo el mismo procedimiento. En este debemos obtener una condición para que

$$-N \geq a - \frac{N_0 \log_e \eta}{4a}.$$

- Ello produce

$$\Pr\{e|C = +a\} = Q\left(-\frac{\sqrt{N_0/2} \log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Detección de Señales PAM X

- Recordemos que en un esquema antipodal como PAM, la energía por bit era $\mathcal{E}_b = a^2$. Por lo tanto, ambas probabilidades de error pueden escribirse en términos de la energía por bit del esquema, como sigue:

$$\Pr\{e|C = -a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} + \frac{\log_e(\eta)}{2\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \quad (35)$$

$$\Pr\{e|C = +a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} - \frac{\log_e(\eta)}{2\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \quad (36)$$

Detección de Señales PAM XI

- En el caso que $p_0 = p_1 = 1/2$, la regla MAP se transforma en la regla ML (maximum likelihood). Por lo tanto

$$\eta = 1$$

y

$$\Pr\{e\} = \Pr\{e|C = -a\} = \Pr\{e|C = +a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (37)$$

Detección Binaria de Señales No Antipodales I

- Vamos a considerar un problema ligeramente más complejo: en lugar de hacer la asignación antipodal típica

$$0 \longmapsto -a$$

$$1 \longmapsto +a$$

vamos a considerar la asignación

$$0 \longmapsto b_0$$

$$1 \longmapsto b_1$$

para números arbitrarios b_0 y b_1 , con $b_0 < b_1$.

Detección Binaria de Señales No Antipodales II

- Para analizar esta situación, definamos

$$\bar{b} = \frac{b_0 + b_1}{2},$$

es natural definir entonces

$$\begin{aligned} a &= b_1 - \bar{b} = b_1 - \frac{b_0 + b_1}{2} = \frac{-b_0 + b_1}{2} \\ &= \bar{b} - b_0 = \frac{b_0 + b_1}{2} - b_0 = \frac{-b_0 + b_1}{2} \end{aligned}$$

Detección Binaria de Señales No Antipodales III

- Por lo tanto, condicional a la transmisión $C = b_0$, la observación es

$$R = \bar{b} + a + N$$

y condicional a la transmisión $C = b_1$, la observación es

$$R = \bar{b} - a + N$$

Es decir, el problema puede ser reducido al uno de detección antipodal desplazando el ruido en una constante $\bar{b}$.

- Definimos entonces

$$\bar{N} = N - \bar{b},$$

entonces, tenemos que $\bar{N}$ es suficiente para poder determinar si la señal enviada fue $+a$ o $-a$. Recibe el nombre de estadístico suficiente.

Detección Binaria de Señales No Antipodales IV

- Recordemos que la probabilidad de error de un sistema antipodal puede ser expresada en términos de la la energía por bit $\mathcal{E}_b$.
- En el caso de la señalización no antipodal tenemos que la energía por bit (asumiendo que ambos símbolos aparecen en forma equiprobable), es

$$\mathcal{E}_b = \frac{b_0^2 + b_1^2}{2} = a^2 + \bar{b}^2. \quad (38)$$

Es decir, en cada bit se utiliza una fracción

$$\gamma = \frac{a^2}{a^2 + \bar{b}^2}$$

para enviar el símbolo de la señal $\pm a$, y la fracción $1 - \gamma$ para enviar el “tono” c .

Detección Binaria de Señales No Antipodales V

- Las probabilidades de error son, entonces,

$$\Pr\{e|C = b_1\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma\mathcal{E}_b}{N_0}} + \frac{\log_e \eta}{2\sqrt{2\gamma\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \quad (39)$$

$$\Pr\{e|C = b_0\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma\mathcal{E}_b}{N_0}} - \frac{\log_e \eta}{2\sqrt{2\gamma\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \quad (40)$$

Receptores óptimos para señales moduladas binarias en AWGN

- ▶ Ahora que tenemos una idea del desempeño que uno debería esperar en recepción de señales binarias, vamos a ver una estructura receptora que nos permita determinar la información transmitida.
- ▶ Vamos a considerar el modelo de canal donde el mensaje $c(t) = \pm a$ en cada instante de tiempo, y el ruido aditivo es blanco y Gaussiano, con media cero y varianza $N_0/2$.
- ▶ Estudiaremos dos tipos de demoduladores:
 - (a) correladores (basados en cálculo de correlaciones).
 - (b) filtro adaptado (matched filter).

Demodulador tipo Correlador para Señalización Antipodal I

- Consideremos primero un esquema de señalización antipodal del tipo

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT),$$

donde $s(t)$ es un pulso cuadrado de energía unitaria, y $a_l \in \{-a, +a\}$.

- La señal recibida es

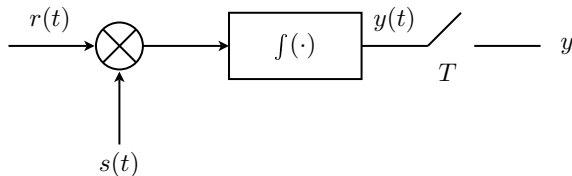
$$r(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT) + n(t).$$

Demodulador tipo Correlador para Señalización Antipodal II

- Si sólo nos concentramos en el intervalo $0 \leq t \leq T$ tenemos

$$r(t) = \pm as(t) + n(t).$$

- En un correlador la señal recibida es multiplicada por la señal $s(t)$ e integrada en el intervalo $[0, T]$



Demodulador tipo Correlador para Señalización Antipodal III

- La señal a la salida del correlador

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t r(\tau)s(\tau)d\tau \\&= \int_0^t (\pm as(\tau) + n(\tau))s(\tau)d\tau \\&= \pm a \int_0^t s(t)s(\tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)s(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Demodulador tipo Correlador para Señalización Antipodal IV

- Por lo tanto, en el instante $t = T$ tendremos

$$y(T) = \pm a + n$$

donde n es una variable aleatoria Gaussiana definida por

$$n = \int_0^T n(t)s(\tau)d\tau$$

- El valor esperado de n es:

$$\mathbb{E}[n] = \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)]s(\tau)d\tau = 0, \quad (41)$$

Demodulador tipo Correlador para Señalización Antipodal V

► y la varianza de n es

$$\begin{aligned}\text{Var}[n] &= \mathbb{E}[n^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T n(\tau)n(\tau')s(\tau)s(\tau')d\tau d\tau'\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\tau')]s(\tau)s(\tau')d\tau d\tau' \\ &= \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\tau)]s(\tau)s(\tau)d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(\tau)d\tau \\ &= \frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

Demodulador tipo Correlador para Señalización Antipodal VI

- ▶ Por lo tanto, n es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza $N_0/2$.
- ▶ La densidad condicional en $\pm a$ es

$$f_{R|C}(r|\pm a) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r \mp a)^2/N_0} \quad (42)$$

- ▶ La salida del correlador es entregada a un dispositivo que decide el símbolo detectado, tal como vimos en detección antipodal al comienzo de este capítulo.

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal I

- Consideremos ahora el caso en que utilizamos dos señales ortogonales para hacer la modulación binaria.
- Esto es, utilizamos las señales

$$\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}) = (a, 0)$$

$$\mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}) = (0, a)$$

Entonces, en el intervalo $0 \leq t \leq T$ tenemos

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad m = 1, 2.$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal II

- La señal recibida es bidimensional dado que $s_m(t)$ es un vector de dimensión 2. Por lo tanto, debemos proyectar la señal recibida sobre las dos señales que forman la base que representa el espacio: $\varphi_1(t)$, y $\varphi_2(t)$.
- Obtenemos

$$y_m(t) = \int_0^T r(\tau) \varphi_m(\tau) d\tau, \quad m = 1, 2. \quad (43)$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal III

- Supongamos que la señal transmitida es

$$s_1(t) = s_{11}\varphi_1(t),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}y_1 \equiv y_1(T) &= \int_0^T [s_{11}\varphi_1(\tau) + n(\tau)]\varphi_1(\tau)d\tau \\&= s_{11} + n_1 \\&= a + n_1\end{aligned}$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal IV

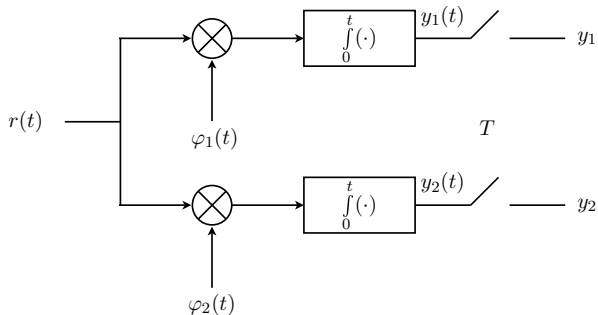
donde

$$n_1 = \int_0^T n(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau$$

es una variable aleatoria Gaussiana (la deducción es la misma vista en la sección anterior).

- Por lo tanto, podemos utilizar la siguiente estructura de correlador:

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal V



Correlador para Señalización Binaria Ortogonal VI

- La salida del segundo correlador es

$$\begin{aligned}
 y_2 \equiv y_2(T) &= \int_0^T [s_{11}\varphi_1(\tau) + n(\tau)]\varphi_2(\tau)d\tau \\
 &= s_{11} \underbrace{\int_0^T \varphi_1(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau}_0 + \int_0^T \varphi_2(\tau)n(\tau)d\tau \\
 &= n_2
 \end{aligned}$$

- La salida del correlador es

$$\mathbf{y} = (a + n_1, n_2). \quad (44)$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal VII

- Similarmente, si

$$s_2(t) = s_{22}\varphi_2(t),$$

tenemos que

$$\mathbf{y} = (n_1, a + n_2). \quad (45)$$

- La salida del correlador es la entrada de un detector binario con entrada vectorial.

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal VIII

- Notemos que (n_1, n_2) define un vector Gaussiano multivariado con media

$$\mathbb{E}[(n_1, n_2)] = (0, 0)$$

y matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[n_1 n_1] & \mathbb{E}[n_1 n_2] \\ \mathbb{E}[n_2 n_1] & \mathbb{E}[n_2 n_2] \end{bmatrix} = \frac{N_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como n_1 y n_2 no están correlacionadas, y (n_1, n_2) es Gaussiano, entonces n_1 y n_2 son independientes.

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal IX

- Por lo tanto, la densidad conjunta entre (y_1, y_2) condicional a la transmisión de s_1 es

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(y_1, y_2|\mathbf{s}_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^2 e^{-(y_1-a)^2/N_0} e^{-y_2^2/N_0}. \quad (46)$$

- Similarmente, la densidad conjunta entre (y_1, y_2) condicional a la transmisión de s_2 es

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(y_1, y_2|\mathbf{s}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^2 e^{-y_1^2/N_0} e^{-(y_2-a)^2/N_0}. \quad (47)$$

- Podemos observar que una consecuencia que n_1 y n_2 sean independientes es el hecho que

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(y_1, y_2|\mathbf{s}_m) = f_{y_1|\mathbf{s}}(y_1|\mathbf{s}_m) f_{y_2|\mathbf{s}}(y_2|\mathbf{s}_m) \quad (48)$$

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal I

- Vamos a utilizar un filtro diferente para hacer la detección. Vamos ilustrar los principios de demodulación y detección considerando el caso binario antipodal y con señalización ortogonal.
- La señal recibida por el receptor es

$$r(t) = s_m \varphi(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad m = 1, 2. \quad (49)$$

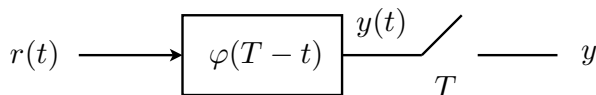
donde $s_1 = +a$, y $s_2 = -a$.

- Consideremos un filtro lineal cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = \varphi(T - t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (50)$$

es decir, igual a una versión en reversa de la señal $\varphi(t)$.

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal II



► La salida del filtro lineal es

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t r(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau) \varphi(T - t + \tau) d\tau \end{aligned}$$

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal III

- Por lo tanto, en $t = T$

$$\begin{aligned}y &\equiv y(T) = \int_0^T r(\tau)\varphi(\tau)d\tau \\&= \int_0^T [s_m\varphi(\tau) + n(\tau)]\varphi(\tau)d\tau \\&= s_m \int_0^T \varphi(\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)\varphi(\tau)d\tau \\&= s_m + n\end{aligned}$$

es decir, la salida del filtro ajustado es la misma que un correlador.

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal IV

- Consideremos por ejemplo la señal

$$\varphi(t) = A\frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

entonces,

$$h(t) = \varphi(T - t) = A\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal V

y

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \varphi(\tau) \varphi(T - t + \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{A}{T} \tau \frac{A}{T} (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) \mathbf{1}_{[t-T,t]}(\tau) d\tau\end{aligned}$$

donde la función

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal VI

recibe el nombre de función indicatriz o función característica del conjunto $[a, b]$.

- La multiplicación de dos funciones características se puede escribir en términos de una sola, de la siguiente forma

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(t)\mathbf{1}_{[c,d]}(t) = \mathbf{1}_{[a,b] \cap [c,d]}(t)$$

obviamente, si $b < c$, $\mathbf{1}_{[a,b]}(t)\mathbf{1}_{[c,d]}(t) = 0$.

- En general,

$$\mathbf{1}_{[a,b] \cap [c,d]}(t) = \mathbf{1}_{[\max(a,c), \min(b,d)]}(t).$$

con la suposición tácita que $\max(a, c) \leq \min(b, d)$.

- Volviendo al problema original, tenemos que considerar 4 subcasos:

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal VII

- Si $t < 0$, la función $\mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) = 0$ en todo el intervalo de integración, y por lo tanto,

$$s(t) = 0.$$

si $t < 0$.

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal VIII

- Si $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) \mathbf{1}_{[t-T,t]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t [\tau(T - t) + \tau^2] d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{t^2}{2}(T - t) + \frac{t^3}{3} \right].\end{aligned}$$

Entonces, $s(T) = TA^2/3$.

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal IX

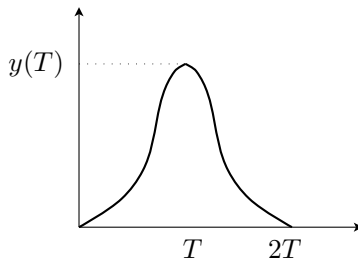
- Si $T \leq t \leq 2T$

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) \mathbf{1}_{[t-T,t]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[t-T,T]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_{t-T}^T [\tau(T - t) + \tau^2] d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{T^2}{2} (T - t) - \frac{(t - T)^2}{2} (T - t) + \frac{T^3 - (t - T)^3}{3} \right].\end{aligned}$$

y por lo tanto, $s(T) = TA^2/3$. Además, si $t = 2T$, $s(2T) = 0$.

Demodulación via Filtro adaptado en Señalización Antipodal X

- Para $t > 2T$ se tiene que $s(t) = 0$ pues la función $[t - T, t] \cap [0, T] = \emptyset$.



- El valor máximo de la señal $y(t)$ se alcanza en $y(T)$ y corresponde a la energía de la señal $\varphi(t)$.

Señalización Binaria Ortogonal I

- ▶ En la sección de uso de correladores con señalización binaria ortogonal vimos que la demodulación de una señal modulada de esta forma requería del uso de dos correladores.
- ▶ En el caso del filtro adaptado, esto también es necesario.
- ▶ Consideremos los filtros con respuestas al impulso dados por

$$h_1(t) = \varphi_1(T - t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$h_2(t) = \varphi_2(T - t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Señalización Binaria Ortogonal II

- Definimos las salidas de cada filtro como

$$y_m(t) = \int_0^t r(\tau) h_m(t - \tau) d\tau, \quad m = 1, 2. \quad (51)$$

- Las muestras en $t = T$ son

$$\begin{aligned} y_m &= \int_0^T r(\tau) h_m(T - \tau) d\tau, \\ &= \int_0^T r(\tau) \varphi_m(\tau) d\tau, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Señalización Binaria Ortogonal III

- Las salidas de ambos filtros son idénticas a las del banco de correladores.

Propiedades del Filtro Adaptado I

- ▶ El filtro adaptado tiene algunas propiedades que lo hacen relevante al momento seleccionar demoduladores.
- ▶ La propiedad más interesante es la siguiente:

Teorema

Si una señal $s(t)$ sufre de ruido blanco aditivo Gaussiano, el filtro cuya respuesta al impulso se ajusta a $s(t)$ maximiza la razón señal-a-ruido a la salida del detector.

- ▶ Para demostrar este resultado consideremos la señal recibida

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

donde $n(t)$ es un proceso Gaussiano de media 0 y densidad espectral de potencia $N_0/2$.

Propiedades del Filtro Adaptado II

- Asumamos que $r(t)$ pasa a través de un filtro $h(t)$, de modo que la señal a la salida del filtro es

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau \\&= \int_0^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)h(t-\tau)d\tau \\&= y_s(t) + y_n(t).\end{aligned}$$

- En el instante de muestreo $t = T$ tenemos

$$y(T) = y_s(T) + y_n(T).$$

Propiedades del Filtro Adaptado III

- ▶ Las señales $y_s(t)$ e $y_n(t)$ representan las componentes de señal y ruido, respectivamente, en la señal $y(t)$.
- ▶ La razón señal-a-ruido a la salida del filtro es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\mathbb{E}[y_s^2(T)]}{\mathbb{E}[y_n^2(T)]} \quad (52)$$

- ▶ El término del numerador es constante, por lo tanto

$$\mathbb{E}[y_s^2(T)] = y_s^2(T)$$

Propiedades del Filtro Adaptado IV

- La potencia de la porción de ruido en la señal es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y_s^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(t)]h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(\tau-t)h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt\end{aligned}$$

Propiedades del Filtro Adaptado V

Por lo tanto, la varianza de $y_n(T)$ depende de la densidad espectral del ruido y de la energía de la respuesta al impulso $h(t)$.

- Sustituyendo en la expresión original tenemos

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\left(\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt}$$

Propiedades del Filtro Adaptado VI

- La maximización de la razón señal-a-ruido se debe hacer buscando el valor máximo del numerador manteniendo el valor de la energía

$$\int_0^T h^2(T-t)dt$$

constante.

Propiedades del Filtro Adaptado VII

- Para calcular el valor máximo del numerador, utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que establece que para señales de energía $g_1(t)$ y $g_2(t)$ se tiene

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)dt \quad (53)$$

con igualdad si $g_1(t) = Cg_2(t)$ para alguna constante arbitraria C .

Propiedades del Filtro Adaptado VIII

► Definiendo

$$g_1(t) = h(T-t)\mathbf{1}_{[0,T]}, \quad g_2(t) = s(t)\mathbf{1}_{[0,T]},$$

tenemos que

$$\left[\int_0^T h(T-t)s(t)dt \right]^2 \leq \int_0^T h^2(T-t)dt \int_0^T s^2(t)dt \quad (54)$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{S}{N} \right)_O = \frac{\left(\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau \right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt} \leq \int_0^T s^2(t)dt.$$

Propiedades del Filtro Adaptado IX

- El valor máximo se alcanza cuando $h(t) = s(T - t)$, es decir, el filtro adaptado alcanza la máxima razón señal-a-ruido para un pulso de energía $\mathcal{E}_s$ dado.
- En este caso,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}. \quad (55)$$

Interpretación en el Dominio de la Frecuencia I

- Consideremos el filtro adaptado $h(t) = s(T - t)$. Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_0^T s(T - t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[\int_0^T s(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{-j2\pi fT} \\ &= S^*(f) e^{-j2\pi fT}. \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $|H(f)| = |S(f)|$, y $\angle H(f) = -\angle S(f) - 2\pi fT$.

Interpretación en el Dominio de la Frecuencia II

- En consecuencia, la señal $y(t) = s(t) * s(-t)$ tiene un espectro

$$Y(f) = |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT}.$$

- Por lo tanto, la componente de señal $y_s(t)$ satisface

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Interpretación en el Dominio de la Frecuencia III

y en el instante de muestreo

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_0^T s^2(t) dt = \mathcal{E}_s. \quad (56)$$

(aplicando el Teorema de Parseval).

Interpretación en el Dominio de la Frecuencia IV

- La potencia total del ruido es

$$\begin{aligned}P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) df \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2(f) df \\&= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2(f) df \\&= \frac{\mathcal{E}_s N_0}{2}\end{aligned}$$

Interpretación en el Dominio de la Frecuencia V

- Finalmente, la relación señal-a-ruido es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\mathcal{E}_s^2}{\frac{\mathcal{E}_s N_0}{2}}. \quad (57)$$

que es el mismo resultado que habíamos derivado originalmente.

Detectores para Modulación M -aria I

- El objetivo de la modulación M -aria es enviar en forma simultánea grupos de símbolos, en lugar de hacerlo en forma individual.
- En el capítulo anterior estudiamos varias formas de lograr este objetivo:

(1) **PAM M -ario** (o MPSK).

En este caso $M = 2^k$ y se utiliza un solo pulso de forma $\phi(t)$.

$$s_m(t) = s_m \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

donde $\phi(t)$ es un pulso de Nyquist.

En general, la amplitud

$$s_m = (2m - 1 - M)A, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

para algún valor positivo A .

Detectores para Modulación M -aria II(2) **Ortogonal M -aria**

En este caso se utiliza un conjunto de señales ortogonales $s_m(t)$ con un amplitud fija A .

$$s_m(t) = s_m \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

(3) **Simplex de Señales**

Corresponde a una construcción que se hace a partir de cualquier conjunto ortogonal de señales. En este caso se define

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M s_l(t).$$

Detectores Óptimos para Señalización M -aria en el Canal AWGN

- ▶ Vamos a asumir que el sistema de transmisión utiliza señalización ortogonal M -aria, donde $M = 2^k$, para algún k entero.
- ▶ El canal bajo estudio es un canal bajo ruido aditivo blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, de modo que

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (58)$$

- ▶ Nuestra intención es diseñar un sistema que basado en la observación $r(t)$ pueda estimar la secuencia $(b_1, \dots, b_k)$ transmitida, minimizando la probabilidad de cometer un error.

Demodulador de Señal I

- ▶ Al igual que en el caso de demodulación binaria, vamos a separar el proceso en dos etapas: demodulación de la señal y detección.
- ▶ La función del demodulador de señal es convertir $r(t)$ en un vector N -dimensional $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$, donde N es la dimensión del espacio de señales transmitidas.
- ▶ La función del detector es decidir cual de las posibles M señales fue la transmitida, basado en la observación del vector $\mathbf{y}$.

Demodulador de Señal II

- En este caso, cada señal $s_m(t)$ puede ser representada por

$$s_m(t) = \sum_{k=1}^N s_{mk} \varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

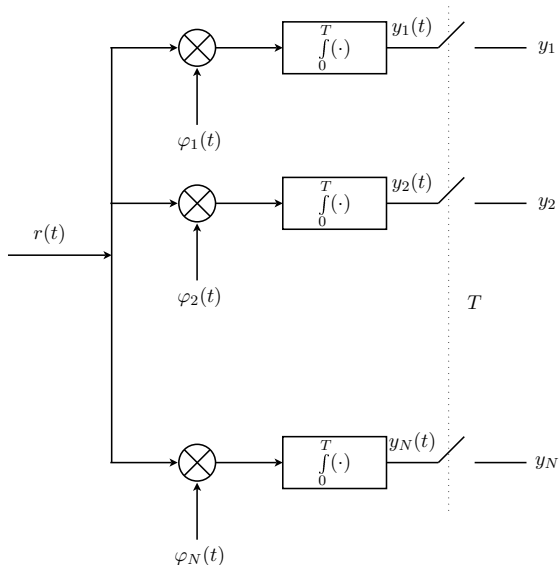
en términos de la base de señales ortogonales $\{\varphi_k(t)\}$ que generan el espacio completo de señales $\{s_m(t)\}$.

- Utilizando el sistema de coordenadas derivado de la representación geométrica del espacio de señales:

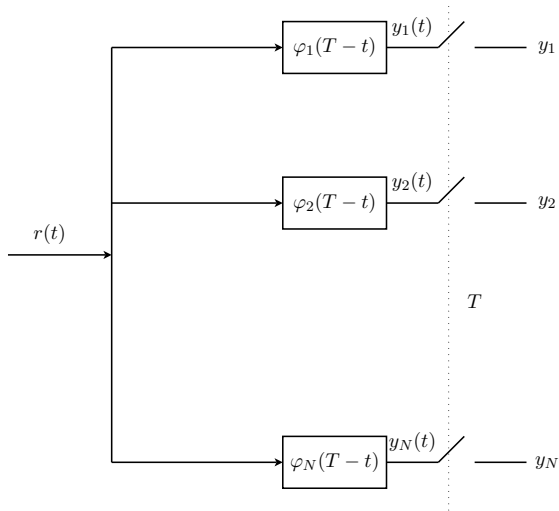
$$\mathbf{s}_m = (s_{m1}, \dots, s_{mN}), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

- Tendremos dos tipos de demoduladores: del tipo correlador, que consiste en N correladores en paralelo, o del tipo filtro adaptado, que consiste de N filtros adaptados en paralelo.

Demodulador Tipo Correlador



Demodulador Tipo Filtro Adaptado



- Se se recibe la señal $r(t)$ tenemos (en el caso de usar un demodulador tipo correlador), en la rama k -ésima

$$\int_0^T r(t)\varphi_k(t)dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)]\varphi_k(t)dt$$
$$y_k = s_{mk} + n_k \quad (59)$$

donde

$$s_{mk} = \int_0^T s_m(t)\varphi_k(t)dt$$
$$n_k = \int_0^T n(t)\varphi_k(t)dt$$

- Podemos escribir la ecuación en forma vectorial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n} \quad (60)$$

- Notemos que en general, tenemos

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{k=1}^N s_{mk} \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k \varphi_k(t) + n'(t) \\ &= \sum_{k=1}^N y_k \varphi_k(t) + n'(t) \end{aligned}$$

donde

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^N n_k \varphi_k(t)$$

es un proceso Gaussiano de media cero que representa la diferencia entre el proceso de ruido original $n(t)$ y la parte que corresponde a la proyección $n(t)$ en la base $\{\varphi_k(t)\}$.

- Vamos a ver que $n'(t)$ no juega ningún rol en la determinación del valor de la señal transmitida, y por lo tanto, la decisión se puede basar en forma exclusiva en y_k .

- Notemos que tenemos los siguientes resultados respecto de $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[n_k] &= \int_0^T \mathbb{E}[n(t)] \varphi_k(t) dt \\ \mathbb{E}[n_k n_m] &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(t)n(\tau)] \varphi_k(t) \varphi_m(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau) \varphi_k(t) \varphi_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \delta_{mk}.\end{aligned}$$

- Por lo tanto, $\mathbf{n}$ es una Gaussiana multivariada de media cero y matriz de covarianza $\frac{N_0}{2}I$, es decir

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{n_i^2}{N_0} \right). \quad (61)$$

- Las salidas del correlador, condicional en la transmisión de la señal $s_m(t)$ son variables aleatorias Gaussianas de valor medio

$$\mathbb{E}[y_k] = \mathbb{E}[s_{mk} + n_k] = s_{mk},$$

y varianza

$$\mathbb{E}[y_k^2] = \frac{N_0}{2}.$$

- Dado que los n_k son independientes, ello implica que los y_k también lo son. Ello simplifica el cálculo de la función densidad de probabilidad conjunta $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$, condicional en $\mathbf{s}_m$:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = \prod_{k=1}^N f(y_k|s_{mk}), \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

donde

$$f(y_k|s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left(- \frac{(y_k - s_{mk})^2}{N_0} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

- Por lo tanto,

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{(y_k - s_{mk})^2}{N_0} \right) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left(- \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 / N_0 \right) \quad (63)$$

- Es $\mathbf{y}$ suficiente para determinar $\mathbf{s}_m$? En otras palabras, existe alguna otra información que pudiésemos extraer de $n'(t)$ para mejorar nuestra estimación de $\mathbf{s}_m$?
- Vamos a demostrar que $n'(t)$ no está correlacionadas con las salidas $\{y_k\}$.

- Primero, calculamos la correlación entre $n'(t)$ e y_k :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[n'(t)y_k] &= \mathbb{E}[n'(t)s_{mk}] + \mathbb{E}[n'(t)n_k] \\
 &= \mathbb{E}[n'(t)n_k] \\
 &= \mathbb{E}\left[\left(n(t) - \sum_{j=1}^N n_j \varphi_j(t)\right)n_k\right] \\
 &= \int_0^T \mathbb{E}[n(t)n(\tau)]\varphi_k(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[n_j n_k]\varphi_j(t) \\
 &= \frac{N_0}{2}\varphi_k(t) - \frac{N_0}{2}\varphi_k(t) = 0.
 \end{aligned}$$

- Esto implica que $n'(t)$ y r_k no están correlacionadas, y como $n'(t)$ e y_k son Gaussianas, entonces son independientes.

- ▶ De esta forma, $n'(t)$ es estadísticamente irrelevante para la decidir qué señal fue la transmitida.
- ▶ Este resultado es válido tanto para demoduladores tipo correlador como filtro adaptado.

Detector Óptimo I

- ▶ Cuando se transmite una señal s_m en un canal AWGN, la señal demodulada es un vector $\mathbf{y}$ que contiene toda la información relevante acerca de la señal transmitida.
- ▶ El vector $\mathbf{y}$ es la suma de dos vectores: el vector de señal s_m , y un vector de ruido $\mathbf{n}$.
- ▶ El primero es un punto en una constelación de señales, mientras que $\mathbf{n}$ es un vector cuyas componentes son Gaussianas, independientes, de media 0 y varianza $N_0/2$.
- ▶ Por ello, $\mathbf{n}$ tiene simetría esférica en torno a cada punto de la constelación, que usualmente se representa como una “nube” de simetría esférica en torno a s_m .

Detector Óptimo II

- El valor $N_0/2$ determina el “radio” de la esfera: si N_0 es pequeño, las nubes estarán altamente concentradas en torno a s_m . Si el valor es grande, la nube estará más “esparcida” en el espacio.
- Deseamos construir un decodificador que maximice la probabilidad a posteriori del dispositivo, es decir:

$$\max_m \Pr\{\text{la señal } s_m \text{ fue transmitida} | y\}.$$

Detector Óptimo III

- Utilizando la regla de Bayes tenemos

$$P(\mathbf{s}_m|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m)P(\mathbf{s}_m)}{f(\mathbf{y})}, \quad (64)$$

donde

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^M f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m)P(\mathbf{s}_m).$$

Detector Óptimo IV

- De las expresiones que vimos antes, tenemos que la función de log-verosimilitud es

$$\log_e f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = -\frac{N}{2} \log_e(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (y_k - s_{mk})^2 \quad (65)$$

$$= -\frac{N}{2} \log_e(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2. \quad (66)$$

- El criterio de máxima verosimilitud es equivalente a determinar la señal $\mathbf{s}_m$ que minimiza la distancia Euclidiana con $\mathbf{y}$, por lo que el criterio recibe el nombre alternativo de **detección de distancia mínima**.

Detector Óptimo V

- Notar que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle + \|\mathbf{s}_m\|^2, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

- Como el término $\|\mathbf{y}\|^2$ es común a todos los términos, el problema se simplifica a determinar m^* tal que

$$\mathbf{s}_{m^*} = \underset{m}{\operatorname{argmin}} \quad -2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle + \|\mathbf{s}_m\|^2 \quad (67)$$

- Notemos finalmente que si todas las señales tienen la misma energía, esto es $\|\mathbf{s}_m\|^2 = \mathcal{E}_M$, el criterio se simplifica a determinar la señal que maximiza la correlación entre la señal $\mathbf{y}$ y $\mathbf{s}_m$.
- Por lo tanto, el demodulador tipo correlador, o equivalentemente el de filtro adaptado, son óptimos en el sentido que maximizan la probabilidad a posteriori del decodificador.