EM757 - Seminario de Telecomunicaciones

Capítulo No. 1

Introducción

Patricio Parada - Jorge Silva

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Contenidos

Introducción

- Comunicación está en el centro del desarrollo de la historia del hombre.
- Ingeniería produjo tecnologías para asistir esta necesidad.
- Diseños iniciales desarrollados en forma independiente.
- Creciente cobertura hace necesario integración de diferentes redes.

Introducción

"Es necesario comprender los principios y arquitecturas fundamentales si se quiere continuar la evolución de la industria."

- AT&T (American Telephone and Telegraph) crea Bell Labs. para realizar I & D.
- Centro Matemático de Bell Labs. lidera la investigación en teoría de comunicaciones.
- Contribución más importante: creación de Teoría de Información (Claude E. Shannon, 1948).

Introducción

- Durante los primeros 25 años T. de I. tiene escaza influencia en el diseño de sistemas de comunicaciones.
- A comienzos de los 70 la tecnología de IC's y una compresión con una mente más "ingenieril" permiten consumar la unión entre T. de. I. y el diseño de sistemas de comunicaciones.

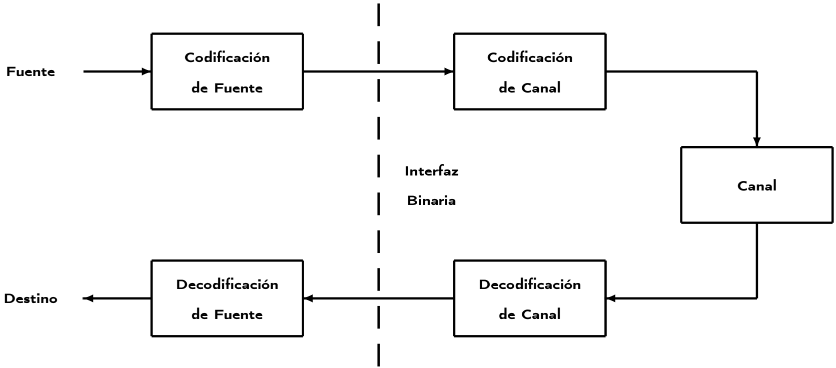
Los principios fundamentales comunes a todo sistema de comunicaciones son dos:

- Todas las fuentes de comunicación pueden ser representadas por secuencias binarias.

Introducción

- Todo diseño de un sistema de comunicaciones debe incluir al menos dos partes:
  1. conversión de la fuente a una secuencia binaria;
  2. adaptación de secuencia binaria a formas de onda apropiadas para el medio de transmisión.

Sistema Digital de Comunicaciones

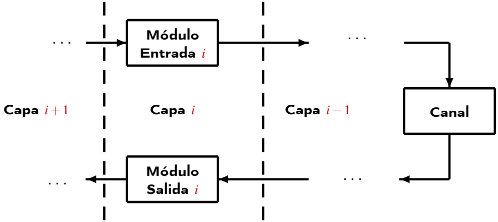


Porqué existe la interfaz digital?

1. Hardware digital es barato, confiable y pequeño.
2. Estandarización de la interfaz binaria simplifica implementación y mejora la comprensión.
3. **Teorema de Separación de Fuente/Canal (Shannon)**
   Si una fuente puede ser transmitida sobre un canal de alguna forma, entonces puede ser transimitido utilizando una interfaz binaria entre la fuente y el canal.

Estandarización de Interfases y Capas

- **Regla Básica de Diseño**: Un sistema de comunicaciones debe estar basado en principios simples y comunes que permitan entederlos, manejarlos y mantenerlos.
- Principio 1: Estandarización de interfaces
- Principio 2: Agrupación de funcionalidades en capas.

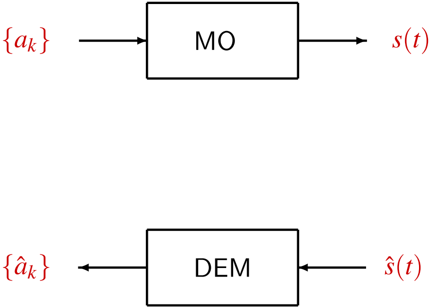


Estandarización de Interfases y Capas/Ejemplos

1. MODEM:

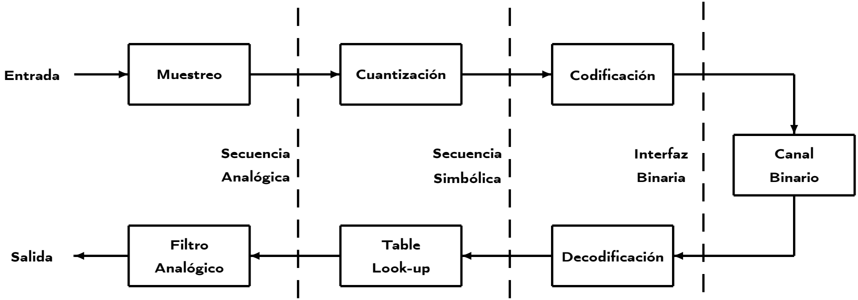
Módulo de Entrada: **MO**dulador

Módulo de Salida: **DEM**dulador.



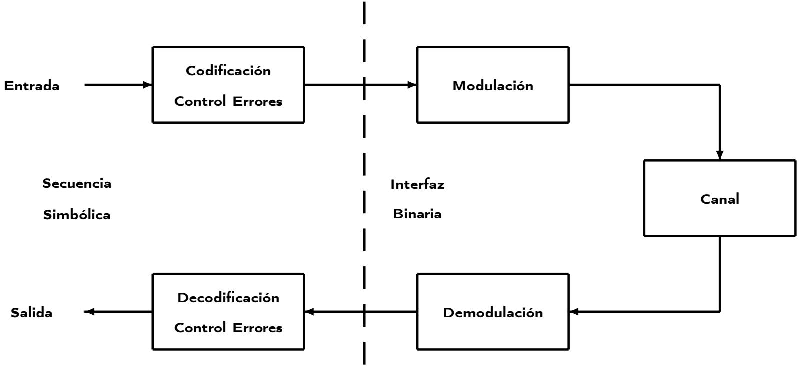
Ejemplos

2. Capa de Codificación/Decodificación de Fuente



Ejemplos

3. Capa de Codificación/Decodificación de Canal



Observaciones

- División en capas va más allá de la división de funciones.
- El módulo de entrada de la capa i concentra todas las funciones bajo ella, es decir, ella ve un canal agregado hasta la interfaz de salida de la capa.
- Similarmente, uno puede definir una fuente agregada hasta la interfaz de entrada del módulo, lo que simplifica el estudio de las distintas funciones de cada capa.
- Toda la discusión es válida para enlaces punto-a-punto. Puede ser extendida al caso de redes de comunicaciones.

Observaciones

REDES: posibilidad de interacción más compleja:

en la misma capa:

- Broadcasting (uno a varios): El módulo de entrada de la capa i tiene múltiples módulos de salida asociados.
- Acceso múltiple (varios a uno): Múltiples módulos de entrada de la capa i tiene un único módulo de salida asociado.

entre capas:

- Broadcasting (uno a varios): El módulo de entrada de la capa i tiene una interfaz con múltiples módulos de entrada en la capa $i-1$.
- Acceso múltiple (varios a uno): Múltiples módulos de entrada de la capa i tiene una interfaz con un único módulo de entrada en la capa $i-1$.

Fuentes de Comunicación

- Necesitamos una definición matemática precisa, independiente de la naturaleza de la fuente.
- Ejemplo: Fuente discreta

$$\begin{aligned} a, b, c, d, \ldots, z: &\quad \text{Alfabeto tradicional} \\ 0-9, A, F: &\quad \text{Alfabeto hexadecimal} \end{aligned}$$

- Ejemplo: Fuente continuas: formas de onda analógica.

La salida de una fuente será modelada como la función muestral de un proceso aleatorio.

Observaciones

- Hasta 1948 el desarrollo de las comunicaciones se basó fuertemente en Análisis de Fourier (teoría de Nyquist).
- Idea central: es suficiente estudiar el efecto de hacer pasar sinusoides por el sistema para poder analizar y proponer diseños de un sistema de comunicaciones.
- Shannon: si el destinatario sabe que recibirá una forma de onda sinusiodal, porqué no generarla localmente con un oscilador?

Nuevo paradigma

Debemos conocer el conjunto de valores posible que puede tomar la salida de la fuente si desea que el sistema pueda transmitir cualquiera de las posibles salidas de la fuente.

Caracterización matemática de una fuente de información

- Alfabeto (conjunto) de posibles valores $\mathscr{A}$
- Medida de probabilidad asociada $\mathbf{p}$.

Formas de Codificación de Fuente

Misión del Codificador de Fuente: convertir la salida de la fuente desde su forma original a una secuencia de bits.

Técnicas de codificación de fuente:

- Para fuentes discretas: representación de símbolos de la fuente por medio de secuencias binarias.
- Ejemplos:

$$\{a, b, \ldots, z\} \rightarrow \text{ secuencias de 5 bits (32 posiblidades)}$$

$$\text{Código ASCII} \rightarrow \text{ secuencias de 8 bits (256 posiblidades)}$$

- En general podemos agrupar m símbolos de la fuente para codificarlos en una secuencia binaria de largo finito (fijo o variable).
- Fuentes analógicas: conversión A/D y expansión ortonormal (más sofisticado y general).

Formas de Codificación de Fuente

La codificación de fuentes analógicas comprende tres pasos:

1. **Muestreo** de la señal original (entra: función real; sale: secuencia de números reales).
2. **Cuantización** en un número finito de niveles o posibles valores.
3. **Compresión** a la representación que utilice el menor número de bits posible.

Canales de Comunicación

Definición: El canal de comunicación es la parte del sistema entre la fuente y el destino, y no está bajo el control del diseñador.

La caracterización exacta del canal depende del punto de vista del diseñador:

- Cod. de fuente: canal digital con entrada y salida binaria.
- Modem telefónico: canal de voz de 4kHz.
- Cable modem: cable coaxial de longitud y ancho de banda dado.

Suposición habitual: un canal físico incluye las antenas, amplificadores, lasers, etc. Si el canal corresponde al medio físico el proceso de codificación recibe el nombre

de modulación/demodulación (anacronismo de los tiempos de transmisión analógica).

Modulación

Modulación:

secuencia binaria $\rightarrow$ forma de onda pasabajos $\rightarrow$ forma de onda pasabanda

Caracterización matemática de un canal de comunicaciones:

- Alfabeto de entrada $\mathscr{X}$
- Alfabeto de salida $\mathscr{Y}$
- Medida de probabilidad condicional $Q(y|x),\ x \in \mathscr{X}, y \in \mathscr{Y}$.

Porqué necesitamos una descripción de esta naturaleza? ruido.

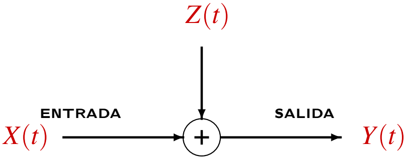
Existen canales discretos

$$Q(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = Q(y_1, \ldots, y_m | x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

Si el canal no tiene memoria:

$$Q(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{l=1}^{m} Q(y_l | x_l,). \tag{2}$$

Canal de ruido aditivo



donde

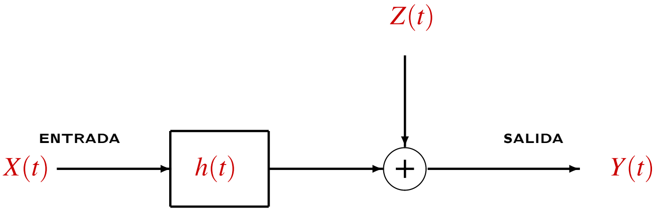
- $X(t)$: forma de onda de la entrada (potencia limitada por P).
- $Y(t)$: forma de onda de la salida
- $Z(t)$: forma de onda de ruido (potencia N_0, independiente de X).

son procesos estocásticos.

$$Y(t) = X(t) + Z(t),\ t > t_0.. \tag{3}$$

Si $Z(t)$ es Gaussiano y blanco (espectro constante), el canal recibe el nombre de **canal de ruido blanco aditivo Gaussiano** (AWGN). Este es un bueno modelo para canales de ancho de banda ilimitado (deep-space communication channel).

Canal Lineal Gaussiano



donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del canal. Por lo tanto,

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau + Z(t), \ t > t_0. \tag{4}$$

El canal lineal Gaussiano es un buen modelo para comunicaciones cableadas y para comunicaciones inalámbricas con línea de visión.

Canal Inalámbrico

- En el caso de comunicaciones inalámbricas fuera de la línea de visión el fenómeno de **dispersión multi-camino** (*multipath fading*) hace que el modelo de canal lineal Gaussiano sea inadecuado.
- La dispersión multi-camino corresponde a la aparición de múltiples canales de comunicación entre la fuente y el destino. Se genera debido a la presencia de uno o más de los siguientes factores:
  - movilidad de la fuente
  - movilidad del destino
  - presencia de obstáculos físicos que obstruyen la comunicación.
- El modelo de canal corresponde a una variación del modelo de canal lineal Gaussiano, en el cual el filtro $h(t)$ es reemplazado por un filtro aleatorio dependiente del tiempo $H(t,\tau)$:

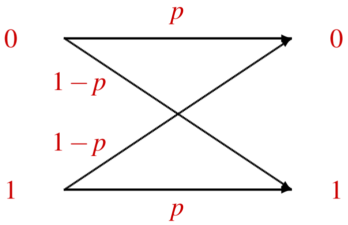
$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau,t)d\tau + Z(t), \ t > t_0. \tag{5}$$

Canales Discretos

Dos ejemplos importantes: **canal binario simétrico** (BSC) y **canal de borrado**.

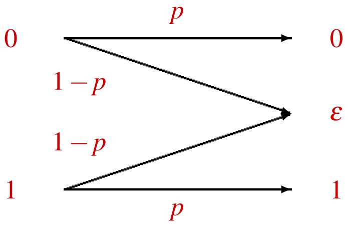
- El BSC de parámetro p es un canal con alfabetos de entrada $\mathscr{X} = \{0,1\}$ y de salida $\mathscr{Y} = \{0,1\}$ y matrix de probabilidad de transición

$$Q = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \tag{6}$$



- Canal binario de borrado (*erasure channel*) de parámetro p es un canal con alfabetos de entrada $\mathscr{X} = \{0,1\}$ y de salida $\mathscr{Y} = \{0,1,\varepsilon\}$ y matrix de probabilidad de transición

$$Q = \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & 1-p & p \end{bmatrix} \tag{7}$$



Codificación de Canal: Modulación

La función de un modulador es mapear la secuencia binaria en la interfaz fuente-canal a una forma de onda analógica.

Ejemplos:

- 2-PAM *binary pulse amplitude modulation*

$$\{u_1, u_2, \ldots\} \rightarrow \sum_n u_n p\left(t - \frac{n}{R}\right)$$

donde $u_n = \pm 1$, R es la tasa a la cual llegan los bits y $p(t)$ es una forma de onda elemental (pulso cuadrado, $\mathrm{sinc}(t)$, etc).

Problema: Cómo elegir $p(t)$ de forma de satisfacer las restricciones de frecuencia impuestas por el canal, y detectar en forma confiable los símbolos recibidos en presencia de ruido?

Codificación de Canal: Modulación

- m-PAM: extensión de 2-PAM a $M = 2^m$ niveles agrupando segmentos de m-bits.
$$\{u_1, u_2, \ldots\} \to \sum_n u_n p\left(t - \frac{n \cdot m}{R}\right)$$
Se reduce la tasa de transmisión a R/m pero se puede resolver entre M posibles valores.
- QAM (*quadrature amplitude modulation*: versión de 2-PAM con símbolos complejos. Estos símbolos "aparecen" al utilizar una señal de modulación pasabanda.
$$(b_1, \ldots, b_m) \to \{u_n\} \to \sum_n u_n p\left(t - \frac{n \cdot m}{R}\right),$$
con $b_i \in \{-1, 1\}$ y $u_n \in \mathbb{C}$.
- Forma más general de modulación: codificar en una base de señales $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_M(t)$ en lugar de coeficientes.

Todas las estrategias de modulación pueden verse como un problema de expansión en una base del **espacio de señales**.

Corrección de errores

- Los errores introducidos por el canal no pueden ser corregidos por el esquema de modulación.
- Agregamos módulo de control y corrección de errores en la capa inmediatamente superior.
- Ejemplo: Código repetido:
  Regla de codificación: repetimos cada símbolo 3 veces

$$\ldots b_{-1}b_0b_1\ldots \to \ldots,(b_{-1}b_{-1}b_{-1})(b_0b_0b_0)(b_1b_1b_1)\ldots$$

  Regla de decodificación: decidimos en favor del símbolo que se repite más en cada intervalo de 3.

Teorema de Capacidad de Canal (Shannon)

Teorema

1. Condición Necesaria: Un esquema de codificación puede reducir **arbitrariamente** la probabilidad de error de detección siempre cuando la tasa de transmisión utilizada no supere un valor específico del canal denomidado **capacidad**.
2. Condición Suficiente: Al utilizar una tasa de transmisión que supere la capacidad del canal, será imposible tener una probabilidad de error de detección tendiente a 0.

Capacidad del Canal Gaussiano

- Asumiendo una entrada de potencia limitada por P, potencial de la señal de ruido igual a N_0 y ancho de banda W, la capacidad del canal (en bps) es

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \text{ bps.} \tag{8}$$

En los últimos años se ha logrado una cercanía de 0.0045 dB con respecto a este límite.

- Si $W \rightarrow \infty$ (deep-space channel) $C \rightarrow SNR \times \frac{1}{\ln 2}$.
El canal tiene un límite, independiente del ancho de banda del canal.

Rudimentos de Teoría de Información

- Teoría de Información (TdeI) es una disciplina centrada alrededor de un enfoque matemático común para el estudio de la captura y manipulación de información.
- Marco teórico para entender procesos como:

observación	mediciones	compresión
compacción	almacenamiento	comunicación
ocultamiento	estimación	toma de decisiones
formación de imágenes	reconocimiento de patrones	computación

- El objetivo central de TdeI es entregar un entendimiento de los problemas de diseño asociados a sistemas de comunicaciones y otros sistemas de información, así como la búsqueda de soluciones a tales problemas.
- Problema Central: maximizar la tasa de transmisión de información en un canal de comunicación sujeto a requerimientos de confiabilidad estrictos, control de potencia y control de ancho de banda.

Preguntas de Interés

- Qué es información?,i.e., cómo se mide?
- Cuáles son los límites fundamentales en la extracción de información a través de observaciones?
- Cuáles son los límites fundamentales en la transmisión de información?
- Cuáles son los límites fundamentales en la compresión y refinamiento de información?
- Cómo debemos diseñar un dispositivo que se acerque a estos límites?
- Cuán cerca están los dispositivos existentes de estos límites?

Fuentes y Canales Aleatorios

Vamos a distinguir tres categorías:

- **Canales (fuentes) Discretos**: tiene un alfabeto de símbolos discreto definido en instantes de tiempo uniformemente espaciados en el tiempo.
- **Canales (fuentes) Continuos**: tiene un alfabeto de símbolos continuo definido en instantes de tiempo uniformemente espaciados en el tiempo.
- **Canales (fuentes) Analógicos**: tiene un alfabeto de símbolos continuo definido en un continuo de instantes de tiempo.

Fuente Discreta

Definición

Una fuente discreta de información es una fuente que emite símbolos tomando un número finito de posibles valores. El conjunto de posibles valores recibe el nombre de **alfabeto de fuente**, y sus elementos son llamados **símbolos** o **letras**.

Una fuente es una variable aleatoria que quedará especificada por el alfabeto de fuente $\mathscr{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{J-1}\}$ y la medida de probabilidad $\mathbf{p}$ definida por

$$\mathrm{Prob}\{X = a_j\} = p(a_j) \equiv p_j,\ j = 0, 1, \ldots, J-1. \tag{9}$$

La medida de probabilidad $\mathbf{p}$ debe satisfacer

$$p_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, J-1$$

$$\sum_{j=0}^{J-1} p_j = 1.$$

Canal Discreto

Definición

Un canal discreto es un canal cuyas entradas pueden tomar un número finito de valores, y cuya salida también está restringida a tomar valores en un conjunto finito de elementos.

El canal quedará descrito por dos variables aleatorias:

- Entrada: X toma valores en el alfabeto de entrada $\mathscr{A} = \{a_0, \ldots, a_{J-1}\}$ con medida de probabilidad $\mathbf{p}$;
- Salida: Y toma valores en el alfabeto de salida $\mathscr{B} = \{b_0, \ldots, b_{K-1}\}$
- El salida del canal será b_k cuando el la entrada es a_j con probabilidad condicional

$$Q(b_k|a_j) \equiv Q_{k|j}.$$

Canal Discreto

- El par (X,Y) puede ser estudiado como un sólo elemento si determinamos la probabilidad conjunta:

$$P_{jk} = \mathrm{Prob}\{X = a_j, Y = b_k\}.$$

- Tenemos las siguientes relaciones:

$$P_{jk} = p_j Q_{k|j}$$

$$q_k = \sum_{j=0}^{J-1} P_{jk} = \sum_{j=0}^{J-1} p_j Q_{k|j}$$

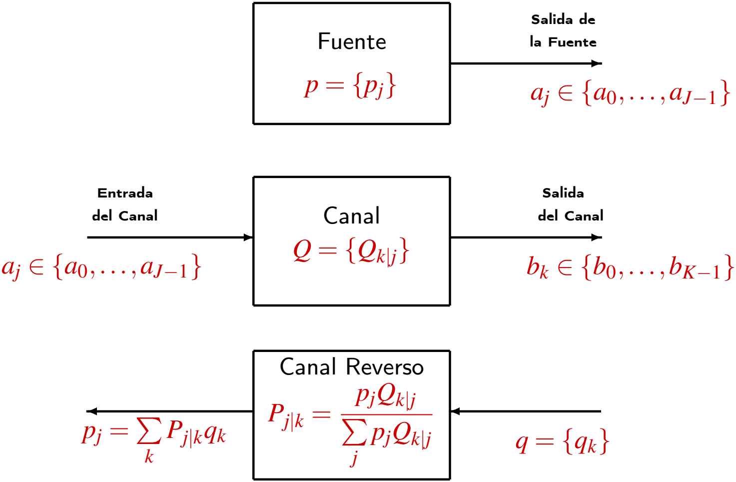
$$\Rightarrow Q_{k|j} = \frac{P_{jk}}{p_j} \text{ y } P_{j|k} = \frac{P_{jk}}{q_k}$$

donde $P_{j|k}$ representa el canal en reversa.

- Fórmula de Bayes:

$$P_{j|k} = \frac{p_j Q_{k|j}}{\sum_j p_j Q_{k|j}}. \tag{10}$$

Resumen


Fuente
$p = \{p_j\}$
Salida de la Fuente
$a_j \in \{a_0, \ldots, a_{J-1}\}$
Entrada del Canal
$a_j \in \{a_0, \ldots, a_{J-1}\}$
Canal
$Q = \{Q_{k|j}\}$
Salida del Canal
$b_k \in \{b_0, \ldots, b_{K-1}\}$
Canal Reverso
$P_{j|k} = \dfrac{p_j Q_{k|j}}{\sum_j p_j Q_{k|j}}$
$p_j = \sum_k P_{j|k} q_k$
$q = \{q_k\}$

Variables Aleatorias Discretas

Definición

Una variable aleatoria es una función que expresa la salida de un experimento aleatorio $\omega \in \Omega$ por un símbolo.

En general nos interesan los bloques de símbolos, por lo que definiremos el vector aleatorio X^n (o $\mathbf{X}$) para denotar el bloque

$$X^n = (X_1, \ldots, X_n).$$

Las realizaciones de este vector las denotaremos por $\mathbf{x}$ definido como

$$\mathbf{x} = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}).$$

Las distribuciones de probabilidad estarán denotadas por

$$p^n(\mathbf{x}), q^n(\mathbf{y}), P^n(\mathbf{x}|\mathbf{y}), \text{ y } Q^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

Variables Aleatorias Discretas

- Marginalización de la l-ésima componente:

$$p(x_l) = \sum_{x_1=a_0}^{a_{J-1}} \cdots \sum_{x_{l-1}=a_0}^{a_{J-1}} \sum_{x_{l+1}=a_0}^{a_{J-1}} \cdots \sum_{x_n=a_0}^{a_{J-1}} p^n(\mathbf{x}) \tag{11}$$

- Una distribución independiente e idénticamente distribuida es aquella que satisface

$$p^n(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}) = \prod_{l=1}^{n} p(a_{j_l}). \tag{12}$$

Una fuente cuya medida de probabilidad es independiente e idénticamente distribuida recibe el nombre de **fuente sin memoria**.

Variables Aleatorias Discretas

- Una canal cuya medida de probabilidad es independiente e idénticamente distribuida recibe el nombre de **canal sin memoria**:

$$Q^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{l=1}^{n} Q(b_{k_l}|a_{j_l}). \tag{13}$$

- Variables aleatorias reales:

$$\mathscr{A} = \{a_j \in \mathbb{R} |\ j = 0, 1, \ldots, J_1\}.$$

- Si X es un v.a. que toma valores en un alfabeto $\mathscr{A}$ con medida de probabilidad $\mathbf{p}$, la **media** $\bar{x}$ **de** X es

$$\bar{x} = \sum_j p_j a_j \tag{14}$$

y la **varianza** σ^2 es

$$\sigma^2 = \sum_j p_j (a_j - \bar{x})^2. \tag{15}$$

Resultados Importantes

Desigualdad de Markov

Sea X una variable aleatoria no negativa con media $\bar{x}$. Entonces,

$$\text{Prob}\{X > a\} \leq \frac{\bar{x}}{a}, \; a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Desigualdad de Chebyshev

Sea X una variable aleatoria con media $\bar{x}$ y varianza σ^2, y que toma valores en el conjunto finito $\mathscr{A} = \{a_j \in \mathbb{R} | j = 0, 1, \ldots, J-1\}$. Entonces

$$\text{Prob}\{|X - \bar{x}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Espacio de Probabilidades Discretas

Vamos a estudiar el conjunto de todos los vectores de probabilidad sobre un conjunto

$$\mathscr{A} = \{a_0, \dots, a_{J-1}\},$$

y lo denotaremos por

$$P^J = \{\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{J-1}) \in \mathbb{R}^n | p_j > 0 \; j = 0, \dots, J-1; \sum_j p_j = 1\} \tag{16}$$

Este conjunto recibe el nombre de J-simplex y corresponde a un subconjunto o cobertura convexa en $\mathbb{R}^J$.

Ejemplo: En el caso de $J = 2$, el conjunto P^2 es una línea recta:

$$P^2 = \{(p_0, p_1) \in \mathbb{R}^2 | p_j > 0 \; j = 0, \dots, J-1; p_0 + P_1 = 1\} \tag{17}$$

Nociones geométricas en P^J

Si consideramos dos medidas de probabilidad $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ en P^J, cómo podemos medir la distancia entre ellas?

- Respuesta 1: usando la métrica Euclideana. No es apropiada para el conjunto.
- Respuesta 2: usar otra forma de distancia.

La ***distancia* de Kullback** es una noción más útil, y que definimos como sigue:

$$D(\mathbf{p}||\mathbf{p}') \equiv \sum_j p_j \log \frac{p_j}{p'_j}. \tag{18}$$

La distancia de Kullback no es una métrica:

- No es simétrica en sus argumentos.
- No cumple la desigualdad triangular.

A pesar de esto resulta útil como noción de distancia.

Nociones de información en P^J

Entropía

La entropía de una variable aleatoria con medida de probabilidad $\mathbf{p} \in P^J$ es una función de ella, y es definida como

$$H(\mathbf{p}) = -\sum_j p_j \log p_j$$

La entropía mide el contenido de información de una variable aleatoria.

Casos especiales:

- Si $p_j = 1$ para algún j, $H(\mathbf{p}) = 0$.
- $H(\mathbf{p})$ alcanza su valor máximo cuando $p_j = 1/J$ para todo j.

Nociones de información en P^J

Discriminante de Kullback

El discriminante de Kullback entre $\mathbf{p}$, y $\mathbf{p}'$ en P^J es la distancia de Kullback $D(\mathbf{p}||\mathbf{p}')$.

El discrimante de Kullback reemplaza la componente geométrica por una de información, pues se interpreta como la información entregada por un experimento respecto de la validez de una hipótesis comparada con la otra.

Por ejemplo,

$$D(\mathbf{p}||(\frac{1}{J},\ldots,\frac{1}{J})) = \log J - H(\mathbf{p}).$$

Nociones de información en P^J

Información mutua

La información mutua es una función de la probabilidad marginal $\mathbf{p}$ y la probabilidad condicional $\mathbf{Q}$, cuya expresión es

$$I(\mathbf{p};\mathbf{Q}) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p_j Q_{k|j} \log \frac{Q_{k|j}}{\sum_i p_i Q_{k|i}} \tag{19}$$

Si $\mathbf{Q}$ representa un canal de comunicación, $I(\mathbf{p};\mathbf{Q})$ es la información que la salida del canal transmite respecto de la entrada.

Propuesto: Demuestre que $I(\mathbf{p};\mathbf{Q}) = D(\mathbf{P}||\mathbf{pq})$, esto es, es la distancia entre la distribución conjunta de la entrada y la salida y el producto de sus marginales.