Pauta Pregunta 3:

Pauta por: Lorenzo Reyes

a) La máquina en estudio posee 2 embobinados en el estator. El enrollado por el cual circula una corriente $i_a(t)$ tiene una inductancia propia L_{aa}, mientras que por el que circula una corriente $i_b(t)$ posee una inductancia propia L_{bb}. Como ambos enrollados se encuentran en el estator, no existe una inductancia mutua entre ellos. Además como no existen enrollados en el rotor, estás dos bobinas son las únicas a considerar.

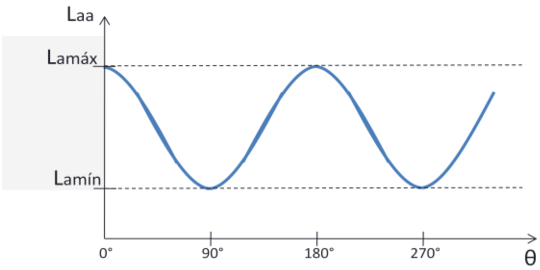
Las expresiones para las inductancias propias de los enrollados en estudio son las siguientes:

$$L_{aa} = \frac{N_e^2}{\Re_a} \qquad L_{bb} = \frac{N_e^2}{\Re_b}$$

Donde N_e es el número de vueltas de ambos enrollados.

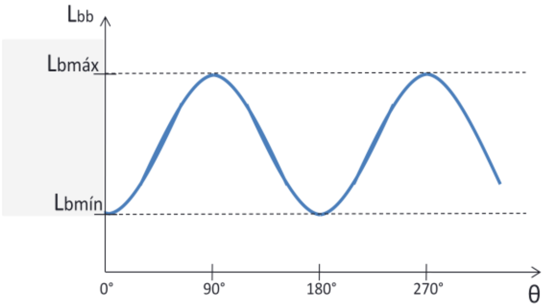
$\boxed{L_{aa}}$

Si $\theta = 0° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amín} \Rightarrow L_a = L_{amáx}$
Si $\theta = 90° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amáx} \Rightarrow L_a = L_{amín}$
Si $\theta = 180° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amín} \Rightarrow L_a = L_{amáx}$
Si $\theta = 270° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amáx} \Rightarrow L_a = L_{amín}$



$\boxed{L_{bb}}$

Si $\theta = 0° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmáx} \Rightarrow L_b = L_{bmín}$
Si $\theta = 90° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmín} \Rightarrow L_b = L_{bmáx}$
Si $\theta = 180° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmáx} \Rightarrow L_b = L_{bmín}$
Si $\theta = 270° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmín} \Rightarrow L_b = L_{bmáx}$



Como las dimensiones son iguales en las 4 direcciones de interés, se tiene que:

$$L_{amáx} = L_{bmáx} \quad L_{amín} = L_{bmín}$$

Se definen:

$$L' = \frac{L_{amáx} + L_{amín}}{2} \qquad L = \frac{L_{amáx} - L_{amín}}{2}$$

Así entonces las inductancias propias tienen las siguientes formas:

$$L_{aa} = L' + Lcos(2\theta) \quad L_{bb} = L' - Lcos(2\theta)$$

Además la expresión general para el torque instantáneo es:

$$T(t) = \frac{1}{2}[i]^T \left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right][i]$$

Las derivadas en función del ángulo de las inductancias propias son las siguientes:

$$\frac{\partial L_{aa}}{\partial \theta} = -2Lsin(2\theta)$$

$$\frac{\partial L_{bb}}{\partial \theta} = 2Lsin(2\theta)$$

Por lo que la expresión para el torque medio es:

$$T(t) = \frac{1}{2}\left[-2Lsin(2\theta)i_a^2 + 2Lsin(2\theta)i_b^2\right]$$

$$T(t) = \frac{1}{2}[-2Lsin(2\theta)2I^2sin^2(\omega t) + 2Lsin(2\theta)2I^2sin^2(\omega t - 90°)]$$

$$T(t) = \frac{1}{2}[-2Lsin(2\theta)2I^2sin^2(\omega t) + 2Lsin(2\theta)2I^2cos^2(\omega t)]$$

$$\Rightarrow T(t) = 2LI^2 \sin(2\theta) [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]$$

$$\Rightarrow T(t) = 2LI^2 \sin(2\theta)\, cos(2\omega t)$$

b) Para una posición θ fija y una ω de la red cualquiera, se tiene que el torque medio es:

$$\overline{T(t)} = 2LI^2 \sin(2\theta)\, \overline{cos(2\omega t)}$$
$$\Rightarrow \overline{T(t)} = 0$$

c) En régimen permanente, se tiene una velocidad constante tal que:

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt} = cte$$
$$\Rightarrow \theta = \omega_r t - \delta$$

Donde δ es la posición del rotor cuando $\omega_r t = 2k\pi$.

Así entonces, la expresión para el torque medio es:

$$T(t) = 2LI^2 \sin\big(2(\omega_r t - \delta)\big)\, cos(2\omega t)$$

Desarrollando la expresión:

$$T(t) = LI^2[\sin(2(\omega_r - \omega)t - 2\delta) + \sin(2(\omega_r + \omega)t - 2\delta)]$$

De aquí, para el único valor que existirá torque media será cuando $\omega_r = \omega$, es decir, la máquina debe girar a la misma velocidad que la frecuencia de la red.

Con dicha condición se tiene:

$$\overline{T(t)} = LI^2\left[\sin(-2\delta) + \overline{\sin(2\omega t - 2\delta)}\right]$$
$$\overline{T(t)} = LI^2 \sin(-2\delta)$$

En cualquier otro caso el torque medio es nulo.