Análisis de redes II

Filtros activos (Diagramas de Bode)

Universidad de Chile, 2009

Introducción-Diagramas de Bode

En este tema veremos la respuesta en frecuencia sistemas lineales (redes elèctricas) en terminos de su amplitud y fase.

El diseño de filtros se basa en el estudio de la respuesta en frecuencia

Los diagramas de Bode se utiliza para el análisis de sistemas lineales, el cual nos revela información de la respuesta en frecuencia del sistema.

Los diagramas de Bode se basan en gráficas logarìtmicas debido a que H.W. Bode utilizó ampliamente en sus estudios una escala logarítmica para la magnitud de las funciones de red así como la variable de frecuencia

Introducción-Diagramas de Bode

- Una de los grandes problema en la ingeniería (sistemas telefónicos) es la perdida de potencia en los circuitos en cascada que se utilizan para transmitir señales (telefónicas). Para tal efecto se introdujo la medida llamada **decibelio**.
- Considere tres circuitos en cascada, donde p_i es la potencia de entrada a cada sistema, p_1, p_2, p_3 es la potencia de salida del circuito A, B, C respectivamente.
- La ganancia de potencia se define como el cociente entre la potencia de salida y la potencia de entrada.
- La ganancia de potencia de salida del sistema se define simplemente como

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{p_1}{p_i}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_o}{p_2} = \sigma_A \sigma_B \sigma_C$$

Introducción-Diagramas de Bode

- La multiplicación de estos cocientes de potencias puede convertirse en una suma por medio del logarítmo, es decir,

$$\log_{10} \frac{p_o}{p_i} = \log_{10} \sigma_A + \log_{10} \sigma_B + \log_{10} \sigma_C$$

- El cociente de las potencias fue denominado **belio** en honor de Alexander Graham Bell (sin embargo, en la práctica el belio es una magnitud inconvenientemente grande).
- Una medida más útil de la ganancia de potencia es el décimo de belio, denominado **decibelio**. El número de decibelios es igual a 10 veces el número de belios, por lo que

$$10 \log_{10} \frac{p_o}{p_i} = \text{Num.} \quad \text{decibelios}$$

Introducción-Diagramas de Bode

- Por ejemplo un amplificador tiene 10dB de ganancia o una lìnea de transmisión tiene una perdida de potencia de 7dB, o un amplificador tiene -100dB de ganancia es decir, su salida esta $180°$ defasada con respecto a la entrada.
- Por tal razón, se utiliza el valor absoluto de la potencia (voltaje o corriente) cuando estas son expresadas en dB.

Introducción-Diagramas de Bode

Por definición:

$$dB = 10 \log \left| \frac{P_{out}}{P_{in}} \right|$$

Por lo tanto

- 10dB representa una potencia de 10
- 10ndB representa una potencia de 10^n
- 20dB representa una potencia de 100
- 30dB representa una potencia de 1000
- 60dB representa una potencia de $10x10^6$

Introducción-Diagramas de Bode

tambien

- 1 dB representa una potencia de aprox. 1.25
- 3 dB representa una potencia de aprox. 2
- 7 dB representa una potencia de aprox. 5

De tal forma

- $4dB = 3dB + 1dB$ es equivalente a una potencia aproximadamente de $2x1.25 = 2.5$.
- Asimismo $27dB = 20dB + 7dB$ y es equivalente a una potencia aproximada de $100x5 = 500$

Introducción-Diagramas de Bode

Cuando utilizamos el decibelio como medida de los cocientes de potencia, en algunas situaciones la resistencia que se ve al mirar el circuito es igual a la resistencia de carga del circuito.

En tal caso,

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{v_{out}^2/R_L}{v_{in}^2/R_{in}} = \left(\frac{v_{out}^2}{v_{in}^2}\right)^2$$

o

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{i_{out}^2 R_L}{i_{in}^2 R_{in}} = \left(\frac{i_{out}^2}{i_{in}^2}\right)^2$$

Introducción-Diagramas de Bode

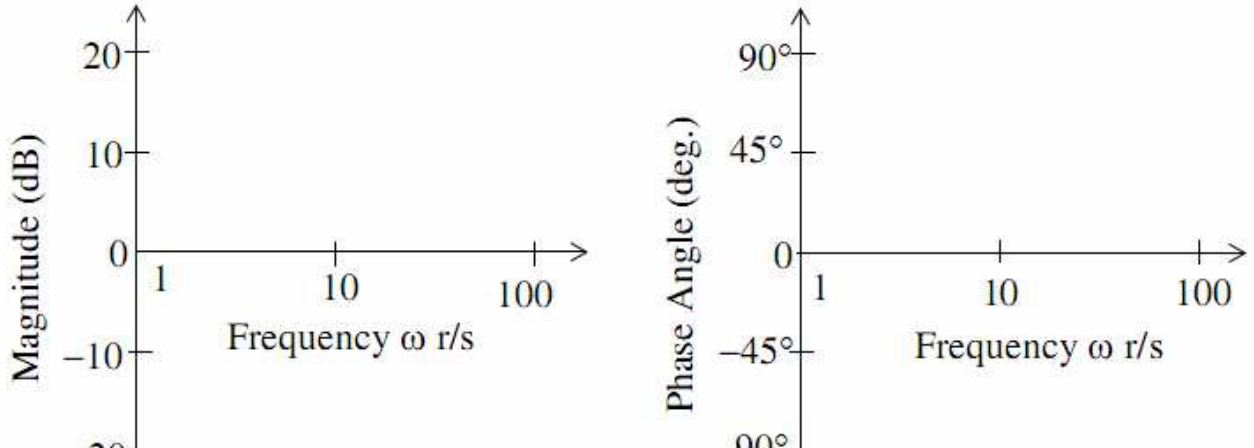
Estas ecuaciones muestran que el nùmero de decibelios puede calcularse de la forma siguiente

$$\begin{aligned} NumeroDecibeles &= 20 \log \frac{v_{out}}{v_{in}} \\ &= 20 \log \frac{i_{out}}{i_{in}} \end{aligned}$$

Introducción-Diagramas de Bode

En los diagramas de Bode de magnitud y fase el eje de la abcisa (eje frecuencia) está definido por una escala logarítmica (base 10) y la frecuencia w es igualmente espaciada entre potencias de 10 como 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, etc.

El eje ordendo en la gráfica de magnitud tiene una escala en unidades de dB y el eje ordenado en la gràfica de fase tiene una escala en grados como se muestra en la sig. figura



Introducción-Diagramas de Bode

Se vuelve conveniente expresar la magnitud de la función de transferencia en dB dado el producto de sus términos puede expresarse como la suma de cada uno de las magnitudes individuales en dB

De tal forma los diagramas de Bode pueden ser approximados por líneas rectas llamadas **asíntotas**.

Introducción-Diagramas de Bode

Considere ahora dos frecuencias w_1 y w_2 y su intervalo definido como $w_2 - w_1$ tal que

$$w_2 - w_1 = \log_{10} w_2 - \log_{10} w_1 = \log_{10} \frac{w_2}{w_1}$$

- Si $w_2 = 2w_1$ decimos que estas frecuencias están separadas por una *octava*
- si $w_2 = 10w_1$ estas frecuencias están separadas por una *decada*

Las pendientes de las lìneas rectas en el sistema de coordenadas de las gràficas de Bode se expresarán en función de estos dos intervalos

Introducción-Diagramas de Bode

Sea una función de transferencia $G(s) = C/s^k$ cuya magnitud es evaluada en $s =\mid jw \mid$, es decir

$$\mid G(jw) \mid = \frac{C}{w^k}$$

Introducción-Diagramas de Bode

Tomando el logarítmo en ambos lados y multiplicando por 20 obtenemos

$$20\log_{10} \mid G(jw) \mid = 20\log_{10} C - 20k\log_{10} w$$

de tal forma

$$\mid G(jw) \mid_{db} = -20k\log_{10} w + 20\log_{10} C$$

Esta relación representa una línea recta con una abcisa definida como $\log_{10} w$ con una pendiente de $-20kdB/decada$ e intercepta a la ordenada en CdB

Introducción-Diagramas de Bode

Considere la siguiente función de transferencia

$$|H(jw)| = \left|1 + \frac{jw}{z}\right|$$

Tomando el logarítimo en ambos lados de la ecuación tenemos

$$20\log_{10}|H(jw)| = 20\log\left|1 + \frac{jw}{z}\right|$$

Para valores de w tales que $w/z << 1$, es decir, $w << z$, tenemos que

$$H(w)|_{w<<z} \approx 20\log 1 = 0dB$$

Se gráfica como una lìnea recta de 0 dB.

Introducción-Diagramas de Bode

Para valores de w tales que $w/z >> 1$ tenemos que

$$H(w)|_{w>>z} \approx 20\log(w/z) = 20\log(w) - 20\log(z)dB$$

esto se graficarà como una línea recta con una pendiente de $20dB$.

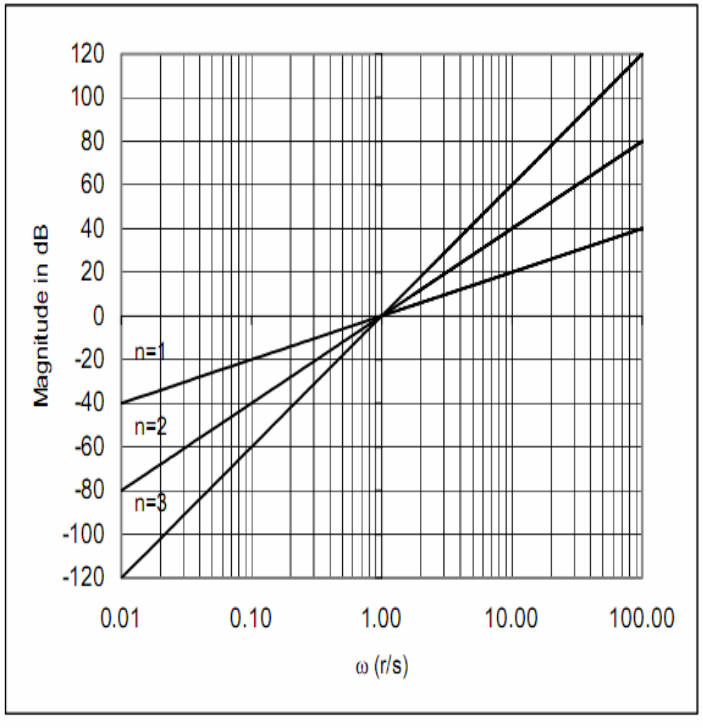
La cual intersecta a la línea de $0dB$ cuando $\log w = \log z$, es decir, cuando $w = z$.

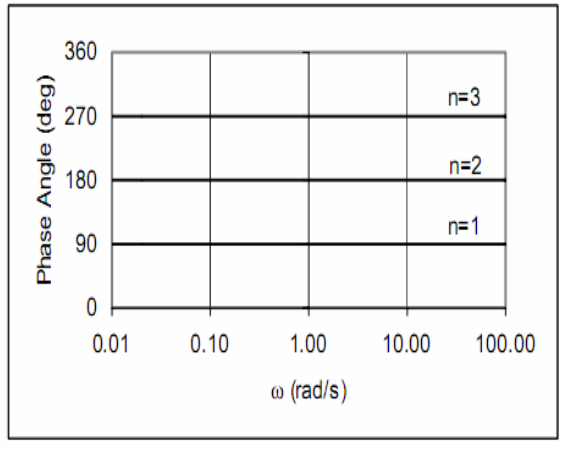
Para el ángulo tenemos que $\angle H(jw) = \tan^{-1}(w/z)$ donde para $w << z \to 0$, $w = z \to -45°$ y $w >> z \to -90°$

Introducción-Diagramas de Bode

De tal forma:

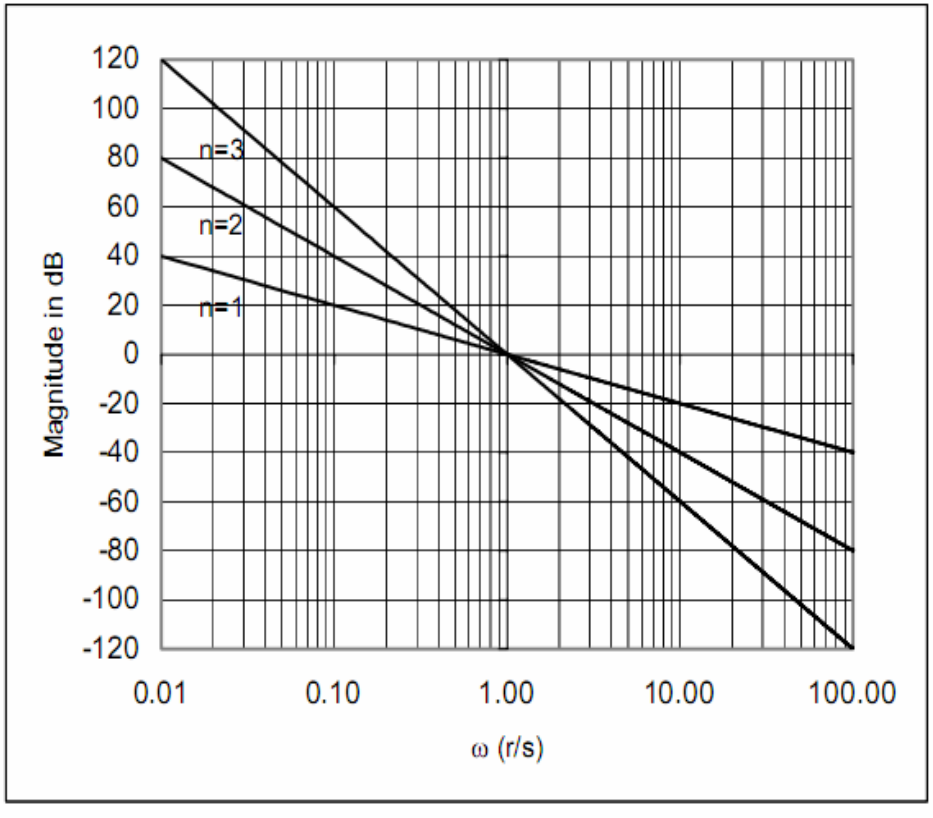
Para un cero de orden n , esto es, $(jw)^n$ en el origen las gráficas de magnitud (20 dB/década) y fase ($90°$)son :

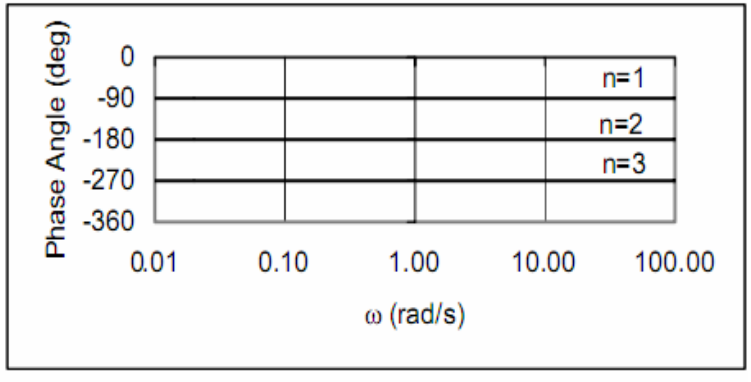




Introducción-Diagramas de Bode

Para un polo de orden n, es decir, $1/(jw)^n = (jw)^{-1}$ en el origen, sus gráficos de Bode (magnitud -20 dB/década ;y fase $-90°$) son los siguientes :





Introducción-Diagramas de Bode

Considere la sieguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{A(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_n)} \quad (1)$$

donde A es una constante real, z_i y p_i se les denomina polos y ceros de la función de transferencia.

Consideraremos polos y ceros complejos en esta sección. Sea $s = jw$ tenemos que

$$H(jw) = \frac{A(jw+z_1)(jw+z_2)\ldots(jw+z_m)}{jw(jw+p_1)(jw+p_2)(jw+p_3)(jw+p_n)} \quad (2)$$

Introducción-Diagramas de Bode

Multiplicando y dividiendo cada elemento del numerador $(jw + z_i)$ por z_i y cada elemento del denominador por $jw + p_i$ por p_i obtenemos

$$H(jw) = \frac{Az_1\left(\frac{jw}{z_1}+1\right) z_2\left(\frac{jw}{z_2}+1\right)\ldots z_m\left(\frac{jw}{z_m}+1\right)}{jwp_1\left(\frac{jw}{p_1}+1\right) p_2\left(\frac{jw}{p_2}+1\right)\ldots p_n\left(\frac{jw}{p_n}+1\right)} \quad (3)$$

Haciendo

$$K = \frac{Az_1z_2\ldots z_m}{p_1p_2\ldots p_n} = A \quad (4)$$

Podemos expresar 3 en la forma de magnitud y fase en dB

Introducción-Diagramas de Bode

$$
\begin{aligned}
|H(w)| \quad &= 20\log|K| + 20\log\left(\frac{jw}{z_1}+1\right) + 20\log\left(\frac{jw}{z_2}+1\right) \qquad (5\\
&+\ldots+20\log\left(\frac{jw}{z_m}+1\right) - 20\log|jw| - 20\log\left(\frac{jw}{p_1}+1\right)\\
&-20\log\left(\frac{jw}{p_2}+1\right) - \ldots - 20\log\left(\frac{jw}{p_n}+1\right)
\end{aligned}
$$

Introducción-Diagramas de Bode

$$\begin{aligned}\angle H(w) &= \angle K + \angle\left(\frac{jw}{z_1}+1\right) + \angle\left(\frac{jw}{z_2}+1\right) \\ &+ \ldots + \angle\left(\frac{jw}{z_m}+1\right) - \angle jw - \angle\left(\frac{jw}{p_1}+1\right) \\ &- \angle\left(\frac{jw}{p_2}+1\right) - \ldots - \angle\left(\frac{jw}{p_n}+1\right)\end{aligned}$$

Introducción-Diagramas de Bode

Las gráficas de magnitud y fase para una constante K se muestran en las siguiente figuras

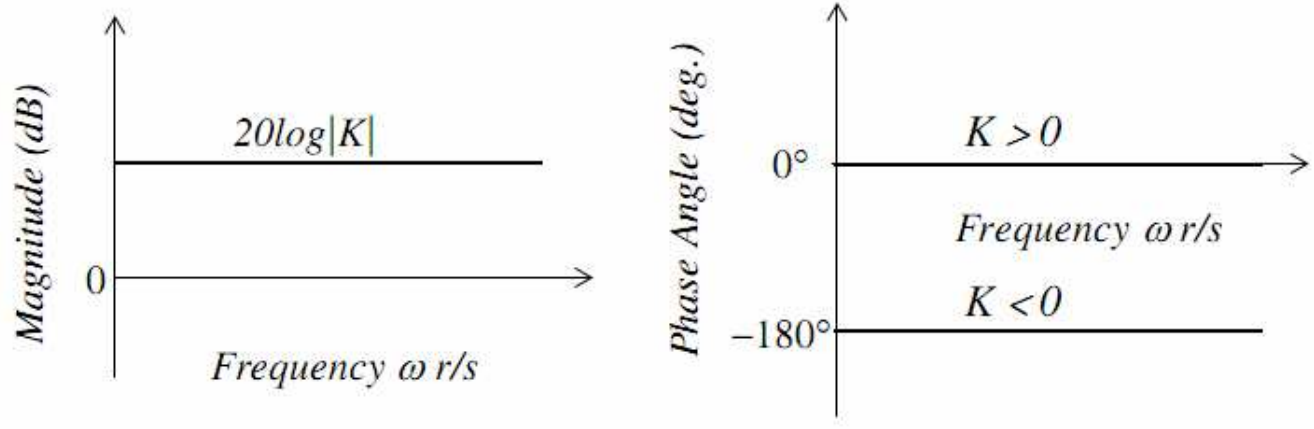


Diagrama de Bode de magnitud y fase para una constante K

donde la constante K puede ser positiva o negativa. Su magnitud es $|K|$ y su ángulo de fase es 0 si $K > 0$ y -180 si $K < 0$

Introducción-Diagramas de Bode

Considere ahora el término $G(jw) = (a + jw)^n$

Su magnitud esta definida como
$|G(jw)| = \sqrt{(a^2 + w^2)^n} = (a^2 + w^2)^{n/2}$

Tomando el logarítmo en ambos lados y multiplicando por 20 tenemos que

$$20 \log |G(jw)| = 10n \log(a^2 + w^2) \tag{6}$$

Normalizando la ecuación anterior usando $u = w/a$

$$20 \log |G(ju)| = 10n \log(a^2 \frac{a^2 + w^2}{a^2}) = 10n \log a^2 + 10n \log(1 + u^2) \tag{7}$$

Introducción-Diagramas de Bode

De la ecuación $20 \log |G(ju)| = 10n \log(1 + u^2) + 10n \log a^2$ tenemos que para el primer término

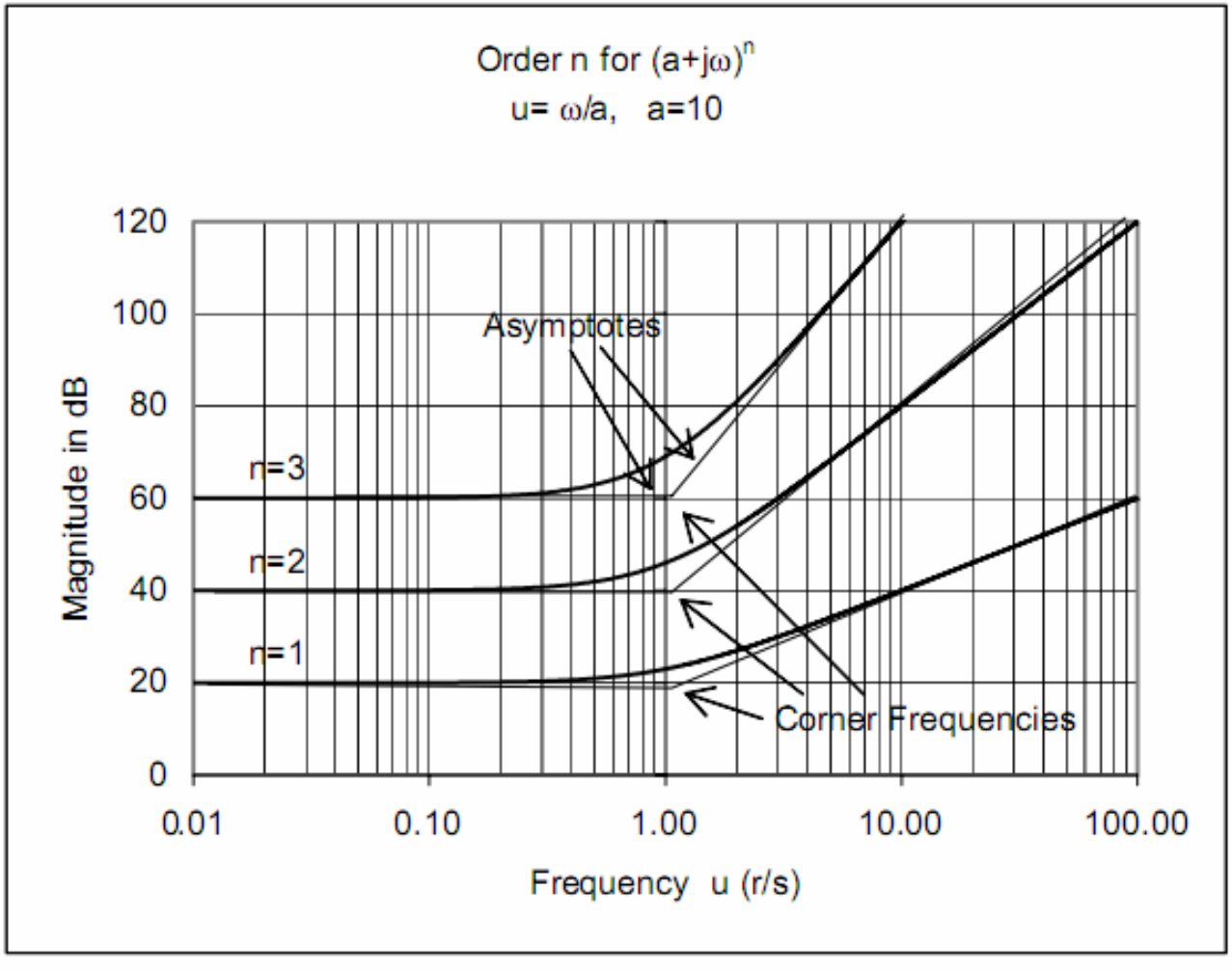
- si $u << 1$ $10n \log 1 = 0dB$
- si $u >> 1$ entonces
  $10n \log(1 + u^2) \approx 10n \log u^2 = 20n \log u$, el cual tiene la misma forma que $G(jw) = (jw)^n$

  La frecuencia donde se intersectan estas dos asíntotas se le llama frecuencia de corte, en ese caso las asíntotas se intersectan en $u = 1$

  El segundo término se representa por una lìnea recta

Introducción-Diagramas de Bode

Si elegimos valores para $a = 10$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ obtenemos la siguiente gráfica de magnitud



Introducción-Diagramas de Bode

Para la respuesta de fase de $G(jw) = (a + jw)^n$ se sigue de la siguiente manera

Sea $u = w/a$ y $\phi(u) = tan^{-1}u$ entonces

$(a + jw)^n = a^n(1 + ju)^n = a^n(\sqrt{1 + u^2}\angle tan^{-1}u)^n = a^n(1 + u^2)^{n/2}e^{jn\phi(u)}$

Como en el caso anterior podemos obtener las asíntotas de $10 \log 1 = 0$ y $10n \log u^2$ para $u << 1$ y $u >> 1$, respectivamente.

Introducción-Diagramas de Bode

El ángulo de fase de $a^n(1+u^2)^{n/2}e^{jn\phi(u)}$ es $n\phi(u)$.

Entonces usando $\phi(u) = tan^{-1}u$ y definiendo $n\phi(u) = \theta(u) = n\tan^{-1}u$ tenemos que

$$\lim_{u\to 0}\theta(u) = \lim_{u\to 0} n\tan^{-1}u = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{u\to\infty}\theta(u) = \lim_{u\to\infty} n\tan^{-1}u = \frac{n\pi}{2} \tag{8}$$

En la frecuencia de corte $u = a$ de forma que $u = 1$ tal que $\theta(1) = n\tan^{-1}1 = \dfrac{n\pi}{4}$

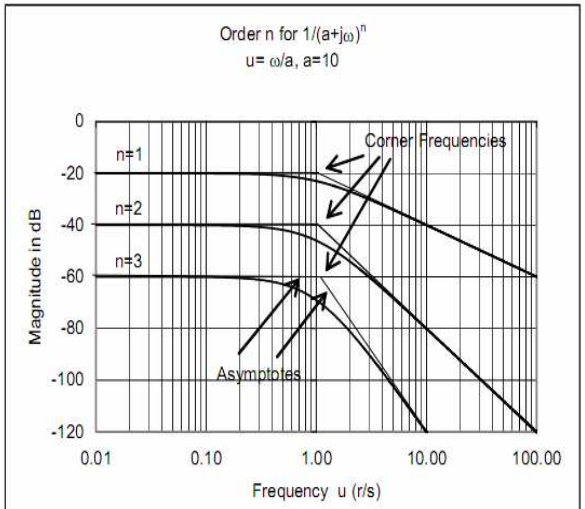
Introducción-Diagramas de Bode

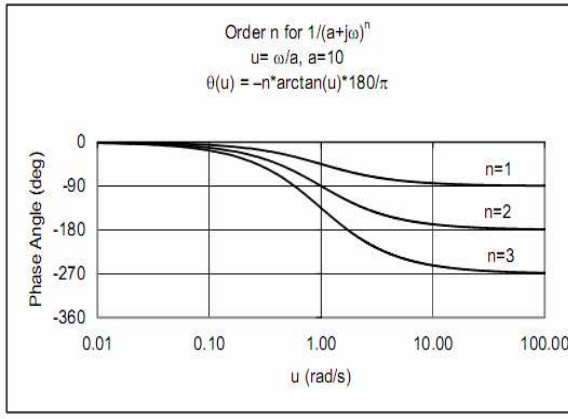
Las gráficas de Bode de magnitud y fase de una función el tipo $G(jw) = 1/(a + jw)^n$ se obtienen de manera similar a las obtenidas para el caso en que $G(jw) = (a + jw)^n$

excepto por un signo menos, es decir para este caso tenemos que $-20 \log |G(ju)| = -10n \log(1 + u^2) - 10n \log a^2$

además $\theta(u) = -n \tan^{-1} u = \dfrac{n\pi}{4}$

sus gráicas de respuesta en frecuencia son los siguientes





iagrama de Bode: polos simples y complej

sea

$$H(s) = \frac{K}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K}{s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2}$$

haciendo $w_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$ como la frecuencia de corte y $\xi = \alpha/w_0$ como el coeficiente de amortiguamiento donde $\xi < 1$ para frecuencias complejas

De tal forma tenemos que

$$H(s) = \frac{K}{s^2+2\xi w_0 s+w_0^2} = \frac{K}{w_0^2}\frac{1}{1+(\frac{s}{w_0})^2+2\xi(\frac{s}{w_0})}$$

iagrama de Bode: polos simples y complej

de donde

$$H(jw) = \frac{K_0}{1 - (\frac{w}{w_0})^2 + j2\xi(\frac{w}{w_0})}$$

donde $K_0 = \frac{K}{w_0^2}$.

Normalizando la ecuación anterior, haciendo $u = w/w_0$

obtenemos que $H(jw) = \frac{K_0}{1 - u^2 + j2\xi u}$

iagrama de Bode: polos simples y complej

sea de donde

$$|H(jw)| = \frac{K_0}{\sqrt{(1-u^2)+4\xi^2u^2}}$$

para $w = w_0$ tenemos que $u = 1$ tal que
$|H(jw)| = K_0/2\xi = H_{max}/2\xi$

Si $\xi = 1/\sqrt{2}$ tenemos que $|H(jw_0)| = H_{max}/\sqrt{2}$ donde w_0 es la frecuencia de corte

iagrama de Bode: polos simples y complej

AMPLITUD, suponiendo que $K_0 = 1$

$$20 \log |H(jw)| = -10 \log[(1 + u^2)^2 + 4\xi^2 u^2]$$

cuando

- si $u << 1$, $20 \log |H| \rightarrow 0dB$
- si $u >> 1$, $20 \log |H| \rightarrow -10 \log u^4 = -40 \log u dB$ (curva de -40 dB/década)

Las asíntotas de magnitud se cortan en la línea de 0dB cuando $u = \dfrac{w}{w_0} = 1$

La diferencia entre la curva real de magnitud y la aproximación asintótica es función de la razón de amortiguamiento ξ o del factor de calidad Q.

iagrama de Bode: polos simples y complej

Ahora cuando si $w = w_0$, $u = 1$ tenemos que $|H(jw)| = 1/2\xi$ es decir

$$20 \log |H(jw)| = -20 \log 2\xi \quad dB$$

de tal forma que si

- para $\xi < 0.5$ tenemos que $|H(jw)| > 0$ (sobre asíntotas)
- para $\xi = 0.5$ tenemos que $|H(jw)| = 0$
- para $\xi > 0.5$ tenemos que $|H(jw)| < 0$ (bajo asíntotas)

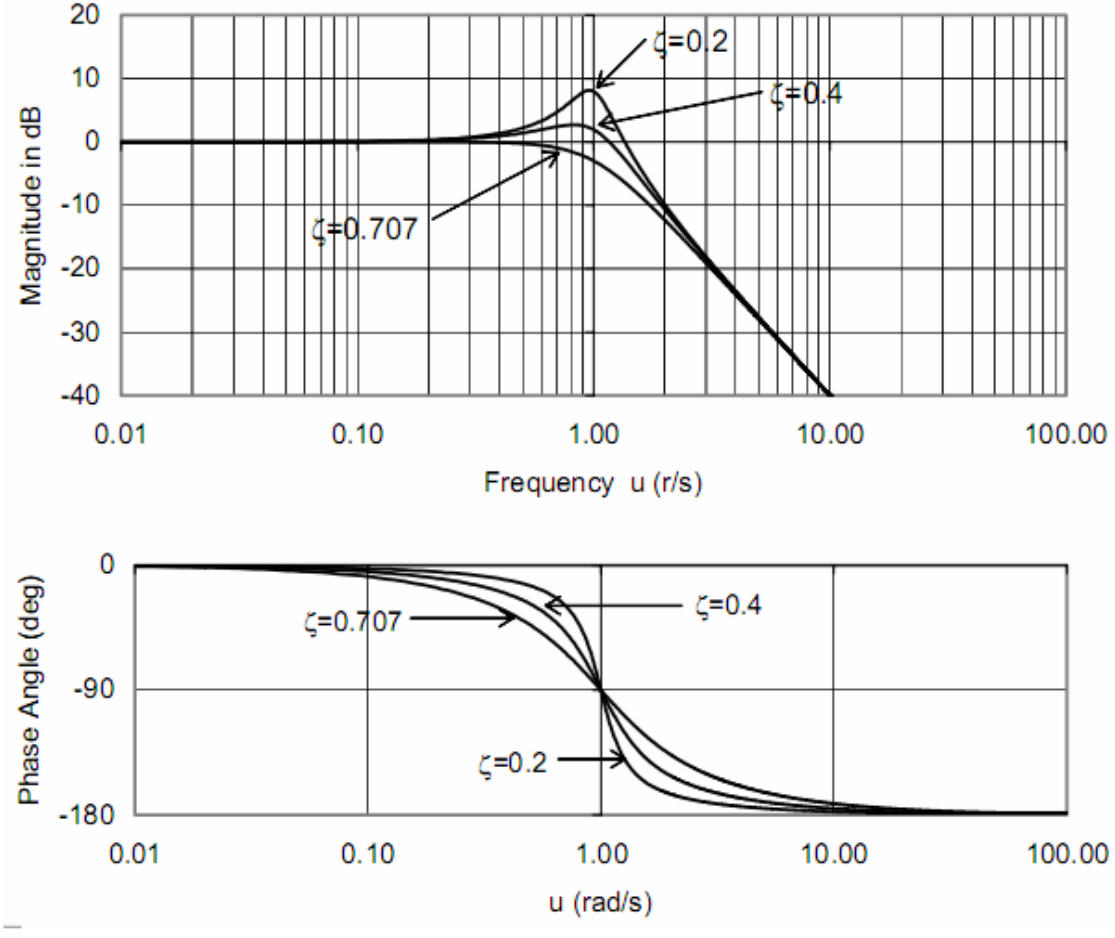
iagrama de Bode: polos simples y complej

FASE Para el ángulo de fase tenemos que

$$\phi(w) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

de tal forma que

- cuando $u << 1$ tenemos que $\phi(w) \rightarrow$ a $0°$
- cuando $u = 1$ tenemos que $\phi(w) \rightarrow$ a $-90°$
- cuando $u >> 1$ tenemos que $\phi(w) \rightarrow$ a $-180°$

iagrama de Bode: polos simples y complej

Las diagramas de Bode de magnitud y fase, están definidas como