Análisis de redes II

Circuitos de frecuencia selectiva (filtros analógicos)

Universidad de Chile, 2009

Introducción

En este tema analizaremos circuitos en los que la frecuencia de la fuente varía.

El comportamiento de estos circuitos también varía a medida que lo hace la frecuencia de la fuente, por lo que la impedancia de los elementos reactivos esta en función de la frecuencia de la señal.

A estos circuitos cuyo comportamiento depende de la frecuencia se le denominan *filtros*. Se utilizan en:

- Radio para seleccionar la señal de una emisora
- En equipos de música, telefonos de tonos, etc

Introducción

Los circuitos de frecuencia selectiva se les denominan también filtros debido a su capacidad para filtrar ciertas señales de entrada dependiendo de su frecuencia.

Estrictamente hablando, No hay ningún circuito práctico de frecuencia selectiva que pueda filtrar en forma perfecta o completa determinadas frecuencias

En realidad lo que hacen los filtros es **atenuar** (debilitar o reducir el efecto de) las señales de entrada cuyas frecuencias estén fuera de una banda de frecuencias determinadas.

Introducción

Por ejemplo: Un equipo de música puede tener un amplificador, el cual esta constituído por una colección de filtros

En el parámetro (frecuencia) seleccionado en el amplificador, tenemos que amplifica los sonidos (frecuencia audibles-300Hz-3KHz) comprendidos en un rango de frecuencias seleccionadas y atenúa las frecuencias situadas fuera de dicha banda.

De este modo, el ecualizador gráfico nos permite modificar el volumen de sonido en cada banda de frecuencia

Introducción

Para simplificar nuestro estudio de circuitos de frecuencia selectiva, restringiremos nuestra atención a casos en que tanto la entrada como la salida son tensiones senoidales.

Por lo tanto la F.T. esta definida como $H(s) = V_0(s)/V_i(s)$.

Sin embargo, en aplicaciones prácticas puede que nos interese una señal de corriente de entrada o de salida.

Introducción

Definiciones básicas:

Banda de paso Las señales que pasan de la entrada a la salida y caen dentro de una banda de frecuencias

Banda eliminada Las frecuencias que no están contenidas en la banda de paso de un circuito

Los circuitos de frecuencia selectiva se clasifican dependiendo de la ubicación de la banda de paso.

Una forma de identificar un tipo de respuesta selectiva consiste en examinar su gráfica de respuesta en frecuencia La gráfica de respuesta en frecuencia muestra como

cambia la F.T. del circuito (tanto en amplitud como en fase) a medida que varía la frecuencia de la fuente.

- Diagrama de ganancia-$|H(jw)|$ vs w
- Diagrama de fase- $\theta(jw)$ vs w

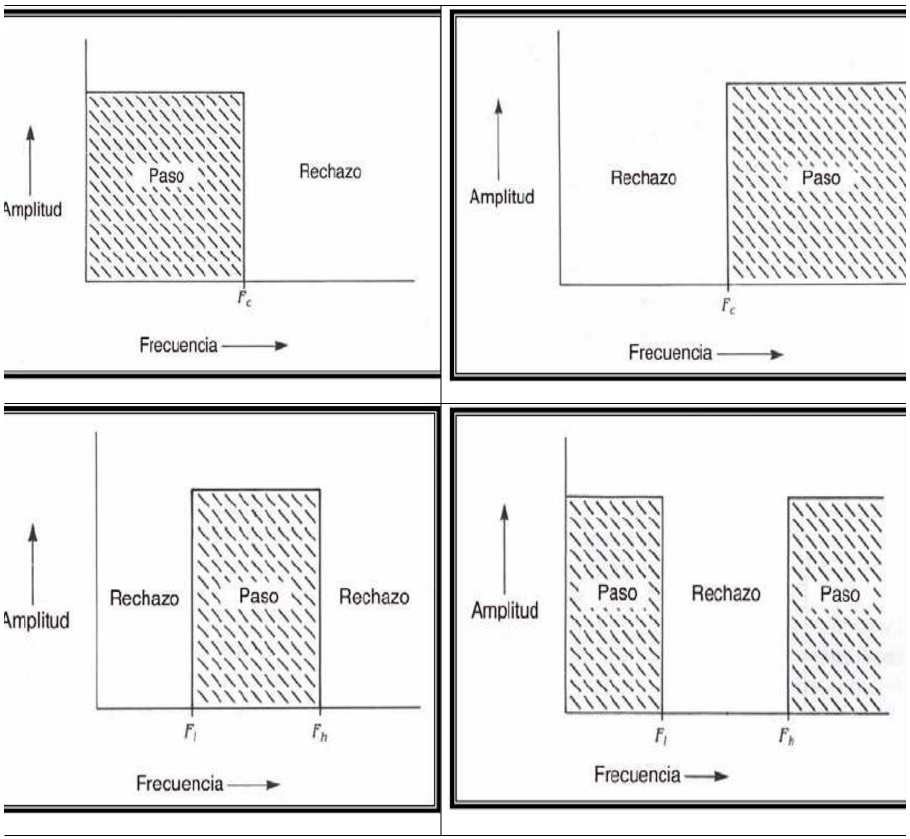
Introducción

Existen cuatro categoría principales de filtro :

- *Filtro Pasabajas* opera dejando pasar frecuencias bajas y rechazando frecuencias altas
- *Filtro Pasaltas* funciona dejando pasar frecuencias altas y rechazando frecuencias bajas
- *Filtro Pasabanda* dejando pasar una banda o intervalo de frecuencias definido y rechaza las frecuencias mayores o menores a los limites de dicha banda
- *Filtro Rechaza banda* funciona con señales de una cierta banda de frecuencias y deja pasar inalteradas las señales fuera de ésta.

Introducción

Las siguientes figuras muestran el comportamiento *ideal* de cada uno de los filtros descritos anteriormente, las cuales está definidas por la frecuencia de corte que las separa



Filtros Pasa Bajo

Considere el siguiente circuito LR

La F.T. de tensión para este circuito es definida como $H(s) = \frac{R/L}{s+R/L}$

Haciendo $s = jw$, calculamos el modulo de la función de transferencia en función de la frecuencia

$$|H(jw)| = \frac{R/L}{\sqrt{w^2 + (R/L)^2}}$$

El ángulo de fase de la F.T. esta definido como

$$\theta(jw) = -\tan^{-1}\left(\frac{wL}{R}\right)$$

Filtros Pasa Bajo

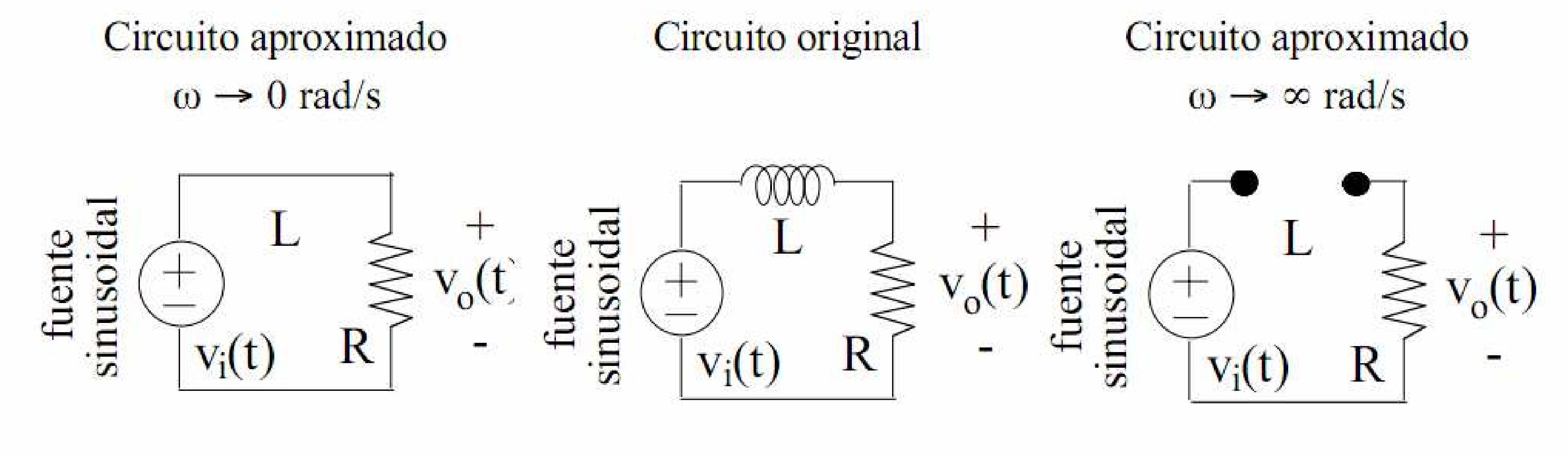
Baja frecuencia, $w = 0$**.** $wL << R$ de tal forma que la bobina trabaja como c.c. Por lo tanto, la tensión de salida y de entrada son iguales tanto en el módulo como en el ángulo de fase

Regin de frecuencia creciente a partir de cero La impedancia de la bobina se incrementa en relación con la resistencia. Se produce un incremento en la magnitud de la tensión de la bobina asi como un desplazamiento en el ángulo de fase existente entre la tensión y la corriente de la bobina.

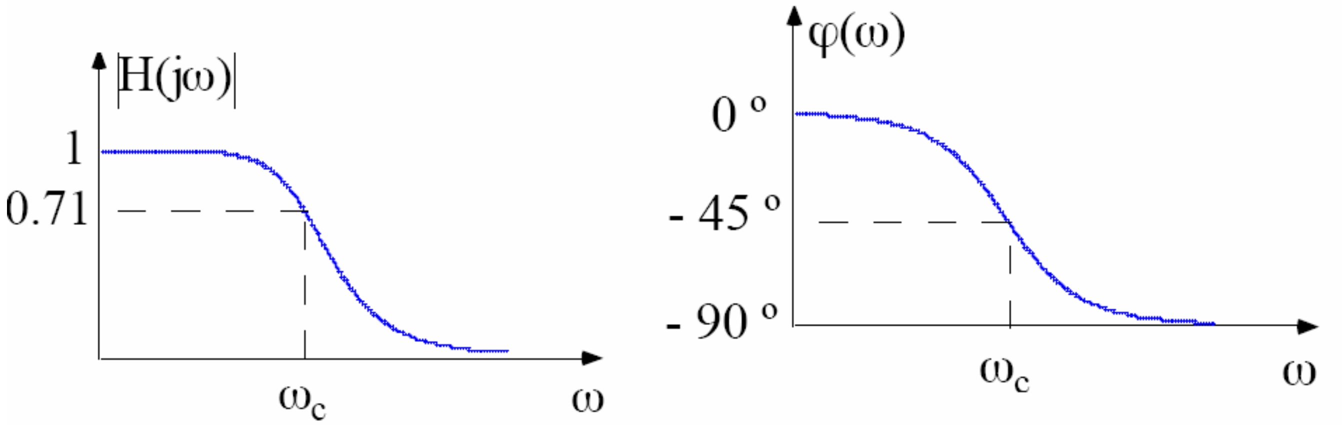
Es decir la tensión de salida esta retardada con respecto a la entrada y a medida que se incrementa la frecuencia este retardo de fase se aproxima a 90°

Filtros Pasa Bajo

[Frecuencias altas, $w = \infty$.] La impedancia de la bobina es muy grande comparada con la de la resistencia $wL >> L$, por lo que la bobina funciona como c.a. Por lo tanto el modulo de la tensión de salida es cero y el ángulo de fase de la tensión de salida es de 90° en retardo con respecto a la tensión de entrada



Filtros Pasa Bajo



Podemos observar que los filtros pasa bajo tiene una respuesta en módulo que cambia gradualmente entre la banda de paso y la banda eliminada, definida por w_c.

En los diagramas de ganancia de los filtros reales es dificil identificar la frecuencia de corte w_c. La definición de frecuencia de corte más ampliamente usada es...

Filtros Pasa Bajo

- La frecuencia de corte es la frecuencia para la cual la magnitud de la función de transferencia se reduce segun el factor $1/\sqrt{2}$ con respecto al valor máximo

$$|H(jw_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}$$

donde H_{max} es el valor máximo del módulo de la función de transferencia.

De la ecuación anterior podemos deducir que la banda de paso de un filtro real se define como el rango de frecuencias para el que la amplitud de la tensión de salida es igual o superior al 70.7% de la amplitud máxima posible.

Filtros Pasa Bajo

Dado que la potencia instantánea entregada por cualquier circuito a una carga es proporcional a V_L^2 donde V_L es la caída de tensión experimentada en la carga:

$$P = \frac{1}{2}\frac{V_L^2}{R}$$

si el circuito tiene una funte de tensión sinusoidal , $V_1(j\omega)$, entonces la tensión en la carga es tambien una sinusoide y su amplitud está en función de la frecuencia ω. Definamos P_{max} como el valor de la potencia instantánea entregada a la carga cuando el módulo de la tensión en la carga es máximo

$$P_{max} = \frac{1}{2}\frac{V_{Lmax}^2}{R}$$

Filtros Pasa Bajo

Si variamos la frecuencia de la fuente de tensión sinusoidal, $V_i(j\omega)$, la tensión en la carga será máxima cuando el módulo de la función de transferencia del circuito sea tambien máximo

$$V_{Lmax} = H_{max}|V_i|$$

Ahora considere lo que sucede con la potencia instantánea cuando la frecuencia de la fuente de tensión es ω_c. Utilizando $|H(jw_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}H_{max}$ vemos que el módulo de la tensión en la carga para ω_c es

$$\begin{aligned} |V_L(j\omega_c)| &= |H(jw_c)||V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}H_{max}|V_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}V_{Lmax} \end{aligned}$$

Filtros Pasa Bajo

Sustituyendo la ecuación anterior en $P = \frac{1}{2}\frac{V_L^2}{R}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
P(j\omega_c) &= \frac{1}{2}\frac{|V_L^2(j\omega)|}{R} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}V_{Lmax})^2}{R} \\
&= \frac{1}{2}\frac{V_{Lmax}/2}{R} = \frac{P_{max}}{2}
\end{aligned}
$$

de tal forma la frecuencia de corte ω_c tambien se denomina *frecuencia de potencia media*. Así, en la banda de paso la potencia instantánea entregada a la carga es igual o superior al 50% de la potencia media máxima.

Filtros Pasa Bajo

Considere el siguiente circuito RC en serie

La tensión de salida se define como la tensión en las terminales del condensador

Utilizando la técnica de división de voltaje en el dominio de s la función de transferencia viene dada como

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Haciendo $s = jw$, calculamos el modulo de la función de transferencia en función de la frecuencia

$$|H(jw)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{RC}^{2}}}$$

Filtros Pasa Bajo

Frecuencia cero, $w = 0$ La impedancia del condensador es infinita y actua como un c.a.. Por tanto, las tensiones de entrada y salida son iguales

Regin de frecuencia creciente a partir de cero La impedancia del condensador se reduce en relación a la impedancia de la resistencia y la tensión de la fuente se divide entre la suma de impedancias del la resistor y capacitor. por lo tanto la tensión de salida es inferior a la tensión de entrada

Frecuencia infinita, $w = \infty$ La impedancia del condensador es cero y este actúa como c.c.. Por lo tanto la tensión de salida es cero.

Filtros Pasa Bajo

- Determine una ecuación que nos proporcione la frecuencia de corte en el circuito RC serie
- Seleecione los valores de R y C que nos permitan obtener un filtro pasa bajo con una frecuencia de corte de 3KHz

Filtros Pasa Bajo

- Para un filtro pasabajo $H_{max} = H(j0)$ y para el circuito dado tenemos que $H_{j0} = 1$.

  Podemos entonces describir de la siguiente forma la relación entre los valores de R, C y w_c

$$|H(jw_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{w_c^2 + \frac{1}{RC}^2}}$$

  Despejando w_c obtenemos la frecuencia de corte igual a

$$w_c = \frac{1}{RC}$$

Filtros Pasa Bajo

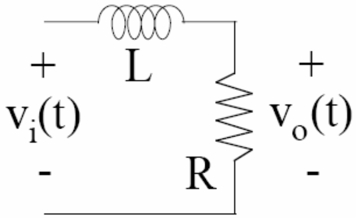
- Puesto que R y C pueden calcularse de forma independiente seleccionaremos primeramente el valor del capacitor por la limitación de sus valores comerciales, para este caso elegiremos el valor de $C = 1\mu F$.
- Para el calculo de la resistencia es necesario convertir la frecuencia de corte especificada de 3 KHz a radianes por segundo $\omega = 2\pi f = (2\pi)(3K) rad/s$

$$R = \frac{1}{w_c C} = \frac{1}{(2\pi)(30x10^3)(1x10^{-6})} = 53.05\Omega$$

Filtros Pasa Bajo

Resumen de filtros paso bajo elementales

Paso bajo RL serie



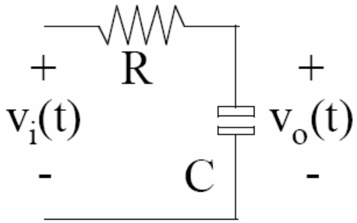
$$\omega_c = R/L$$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

Paso bajo RC serie



$$\omega_c = 1/(RC)$$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

Filtros Pasa Bajo

Observaciones:

- Las dos características de transferencia son de forma generica

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

- Cualquier circuito que tenga una función de transferencia de esta forma se comporta como un filtro pasa bajo
- Con una frecuencia de corte $\omega_c = 1/\tau$ siendo τ la constante de tiempo del circuito (Respuesta natural en regimen transitorio)

Filtros Pasa Alto

Considere ahora un circuito RC.

Sea su función de transferencia haciendo $s = jw$ dada como $H(jw) = \frac{jwRC}{1+jwRC}$

Sea la ecuación del módulo y al ángulo de fase de la F.T. definida como:

$$|H(jw)| = \frac{w}{\sqrt{w^2 + (1/RC)^2}}, \quad \theta(jw) = 90^\circ - \tan^{-1} wRC$$

Filtros Pasa Alto

La diferencia en ángulo de fase entre las tensiones de la fuente y la salida tambien varían a medida que cambia la frecuencia de la fuente.

Para $w = \infty$ la tensión de salida es igual a la tensión de entradapor lo que la diferencia en ángulo de fase es cero.

A medida que se reduce la frecuencia de la fuente y se incrementa la impedancia del capacitor, se introduce un desplazamiento de fase entre la tensión y la corriente en el condensador. esto crea una diferencia de fase entre las tensiones de la fuente y de salida.

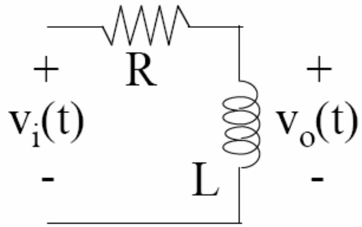
El ángulo de la tensión de salida está adelantado con respecto a la tensión de la fuente.

Cuando $w = 0$ esta diferencia del ángulo de fase alcanza su valor máximo de 90°

Filtros Pasa Alto

Resumen de filtros paso alto elementales

Paso alto RL serie



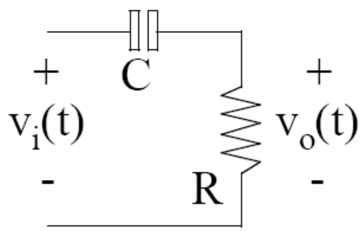
$$\omega_c = R/L$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90^{\circ} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

Paso alto RC serie



$$\omega_c = 1/(RC)$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90^{\circ} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

Filtros Pasa Alto

Observaciones:

- Las dos características de transferencia son de forma generica

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

- Cualquier circuito que tenga una función de transferencia de esta forma se comporta como un filtro pasa alto
- Con una frecuencia de corte $\omega_c = 1/\tau$ siendo τ la constante de tiempo del circuito (Respuesta natural en regimen transitorio)
- La frecuencia de corte siempre tiene el mismo valor, independientemente de que el filtro sea paso alto o paso bajo.

Filtro Pasa-Banda

Los filtros pasa-banda permiten pasar hacia la salida las tensiones comprendidas dentro de una banda de frecuencias, eliminando todas las tensiones cuyas frecuencias caen fuera de esta banda

Los filtros pasa-banda ideales tiene dos frecuencias de cortew_{c1} y w_{c2} que identifican la banda de paso.

En los filtros reales, estas frecuencias de corte se definen como las frecuencias para las que el módulo de la F.T. es igual a $(1/\sqrt{2})H_{max}$.

Filtro Pasa-Banda

Hay tres parámetros importantes que caracterizan a un filtro pasa-banda

Frecuencia Central(resonancia), w_0**.** la frecuencia para que la F.T. del circuito es puramente real.

Cuando se excita un circuito a la frecuencia de resonancia, decimos que el circuito está resonando; -la frecuencia de la función excitadora= a la frecuencia natural del circuito.

La frecuencia central es el centro geométrico de la banda de paso, $w_0 = \sqrt{w_{c1} w_{c2}}$.

Para filtro pasa-banda, el módulo de la F.T. alcanza su máximo a la frecuencia central; $H_{max} = |H(jw_o)|$

Filtro Pasa-Banda

Ancho de banda, β es la anchura de la banda de paso

Factor de calidad, Q es el cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda.

El factor de calidad proporciona una medida de la anchura de la banda de paso medida que es independiente de la ubicación de la banda dentro del eje de frecuencias

Un filtro pasa-banda es caracterizado por cinco parámetros (w_{c1}, w_{c2}, w_0, β y Q), sin embargo solo dos pueden especificarse de forma independiente

Filtro Pasa-Banda

Considere un circuito RLC

El cual tiene una función de transferencia definida como

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Las ecuaciones del módulo y del ángulo de fase de la F.T. serán

$$\begin{aligned} |H(jw)| &= \frac{w(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - w^2)]^2 + [w(R/L)]^2}} \\ \theta(jw) &= 90^\circ - \tan^{-1}\left[\frac{w(R/L)}{(1/LC) - w^2}\right] \end{aligned}$$

Filtro Pasa-Banda

Para $w = \infty$ el condensador se comporta como c.c. y la bobina como un c.a. De tal forma es la bobina la que impide el paso del voltaje a la resistencia. Por lo tanto, la tensión de salida es igual a cero.

Conforme la frecuencia empieza a variar entre $w = 0$ y $w = \infty$, las impedancias tanto del condensador como de la bobina son finitas.

Dado que la impedancia en el condensador es negativa y la de bobina en positiva. En alguna frecuencia se cancelarán haciendo la tensión de salida igual a la fuente. En esta condición se define la frecuencia central w_0 del filtro pasa-banda.

Filtro Pasa-Banda

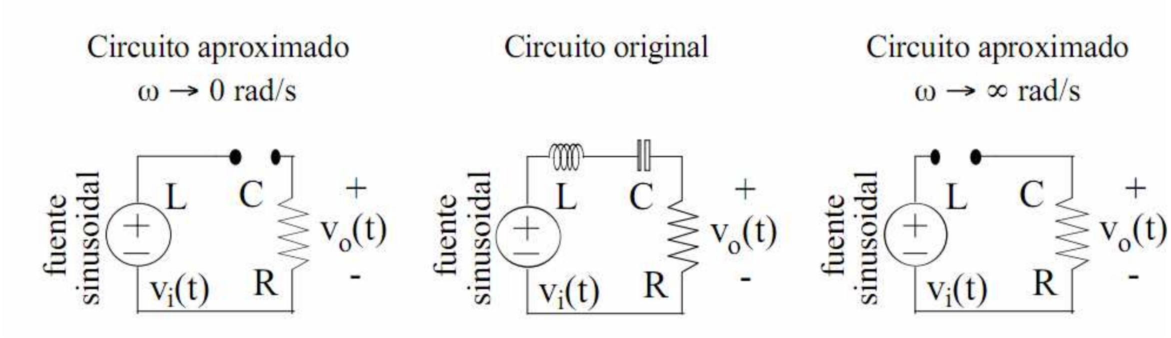
Ahora veremos que pasa con el ángulo de fase de salida.

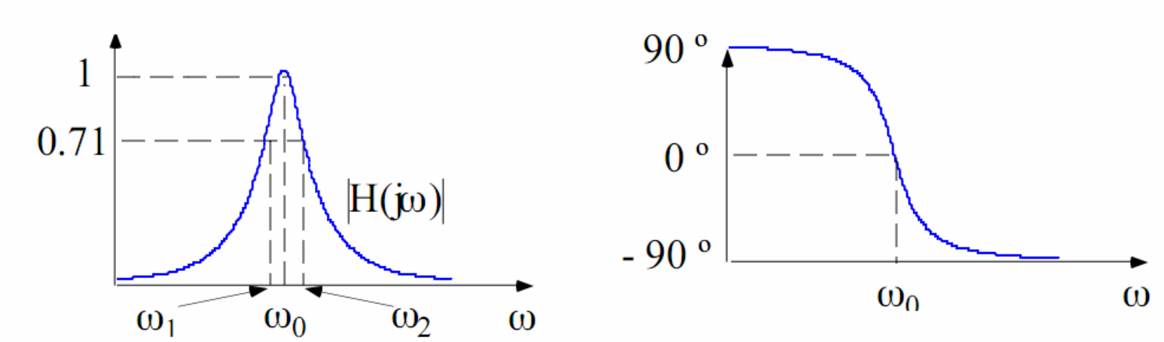
A la frecuencia en que las tensiones de la fuente y de salida son iguales, los ángulos de fase también son iguales.

A medida que se reduce la frecuencia, la contribución del condensador al ángulo de fase es superior a la de la bobina. Puesto que el condensador fuerza un desplazamiento positivo, el ángulo de fase neto será positivo. A muy baja frecuencia, al ángulo de fase de la salida alcanza su máximo de $+90^{\circ}$.

Si ahora incrementamos la frecuencia para que la tensión de la fuente y de la salida estén en fase, la contribución de la bobina al ángulo de fase es superior a la del condensador, La bobina provoca un desplazamiento negativo, por lo que el ángulo de fase neto será negativo. A muy alta frecuencia, el ángulo de fase de la salida

Filtro Pasa-Banda





Filtro Pasa-Banda

Ahora calcularemos los cinco parámetros que caracterizan a un filtro pasa-banda RLC:

Dado que w_0 se define como la frecuencia para que la F.T. del circuito es puramente real, tenemos que

$$jw_0L + \frac{1}{jw_0C} = 0$$

Despejando tenemos que la frecuencia central esta dada como

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Filtro Pasa-Banda

Si para las frecuencias de corte, el módulo de la F.T. es $1/\sqrt(2)H_{max}$.

Realizando las manipulaciones algebraicas tenemos que $H_{max} = |H(jw_0)| = 1$. de tal forma tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{[(1/LC) - w_c^2)]^2 + [w_c(R/L)]^2}}$$

De tal forma las frecuencias de corte w_{c1} y w_{c2} en un filtro pasa-banda vienen definidas como

$$w_{ci} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

con $i = 1, 2$.

Filtro Pasa-Banda

Para confirmar que la frecuencia central w_0 es la media geométrica de las dos funciones de corte, tenemos que

$$w_0 = \sqrt{w_{c1}w_{c2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Si el ancho de banda de un filtro pasa-banda se define como la diferencia entre las dos frecuencias de corte y dado que $w_{c2} >> w_{c1}$ tenemos que

$$\beta = w_{c2} - w_{c1} = \frac{R}{L}$$

Filtro Pasa-Banda

El factor de calidad, se define como el cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda

$$Q = \frac{w_0}{\beta} = \sqrt{\frac{1}{CR^2}}$$

Filtro Pasa-Banda

Como hemos mencionado en el diseño, solo dos de estos parámetros se pueden especificar independientemente. Al igual que el factor de calidad se define en función de w_0 y β.

Podemos expresar las frecuencia de corte de la siguiente forma

$$w_{c1,2} = \pm\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + w_0^2}$$

y

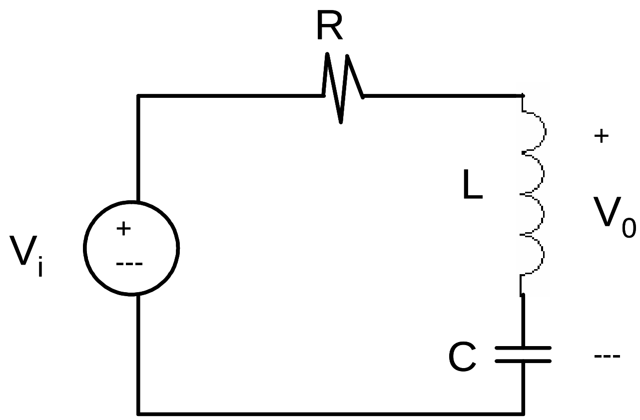
$$w_{c1,2} = w_0 \left[\pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right]$$

Filtros Rechaza Banda

Este filtro deja pasar hacia la salida las tensiones de fuentes situadas fuera de la banda definida por las dos frecuencias de corte y atevua las tenciones de fuente cuya frecuencia esté comprendida entre las dos frecuencias de corte.

El filtro rechaza banda se caracteriza por tener los mismos parámetrso del filtro pasa-banda: las dos frecuencias de corte, la frecuencia central, el ancho de banda y el factor de calidad

Filtros Rechaza Banda



Sa la F.T definida como

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Filtros Rechaza Banda

Sus funciones para el módulo y el ángulo de fase de la F.T. son

$$
\begin{aligned}
|H(jw)| &= \frac{|\frac{1}{LC} - w^2|}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - w^2)^2 + (\frac{wR}{L})^2}} \\
\theta(jw) &= -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{wr}{L}}{\frac{1}{LC} - w^2}\right)
\end{aligned}
$$

Filtros Rechaza Banda

Para $w = 0$ la bobina se comporta como unc.c. y el condesador como un c.a. mientras que para $w = \infty$ estos papeles se intercambian.

En ambas condiciones la tensión de salida se define sobre un circuito abierto, por lo que las tensiones de entrada y salida tiene la misma magnitud.

De tal forma este circuito serie RLC tiene dos bandas de paso: una por debajo de una frecuencia de corte inferior y la otra por encima de una frecuencia de corte superior.

Estre estas dos bandas de paso, tanto la bobina como el condensador tienen impedancias finitas y de signos opuestos.

Filtros Rechaza Banda

A medida que se incrementa la frecuencia a partir de cero, la impedancia de la bobina se incrementa y la del condensador disminuye.

Por tanto el dezplazamiento de faso entre la entrada y la salidase desplaza $-90\circ$ a medida que wL se aproxima a $1/wC$. En cuanto wL supera el valor de $1/wC$ el desplazamiento de fase salta a $+90\circ$ y luego tende a cero a medida que w continua incrementándose.

Filtros Rechaza Banda

Para alguna frecuencia comprendida entre las dos bandas de paso, las impedancia de la bobina y del condensador serán iguales pero de signo opuesto.

Para esta frecuencia, la combinación serie de la bobina y el condensador equivale a un c.c , por lo que el modulo de la tensión de salida deberá ser cero.

Filtros Rechaza Banda

Frecuencia central: Para un filtro rechaza banda , sigue definiendose como la frecuencia para la cual la suma de las impedancia de la bobina y el capacitor son cero.

Sin embargo, en este tipo de filtro, el módulo alcanza su mínimo para esta frecuencia.

Esto se debe a que la frecuencia central del filtro rechaza banda nose encuentra dentro de la banda de paso

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

de donde $|H(jw_0)| = 0$

Filtros Rechaza Banda

Las frecuencias de corte se obtienen sustituyendo la constante $(1/\sqrt{2})H_{max}$ en $|H(jw)|$.

Observando el filtro tenemos que $H_{max} = |H(j)| = |H(j\partial)| = 1$, de forma que

$$w_{ci} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

con $i = 1, 2$.

A partir de las frecuencias de corte podemos generar la ecuación correspondiente al ancho de banda

$$\beta = \frac{R}{L}$$

Filtros Rechaza Banda

Finalmente, la frecuencia central y el ancho de banda nos permiten obtener la ecuación correspondiente al factor de calidad

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2} C}$$

Representando la frecuencia de corte en términos del ancho de banda y de la frecuencia central tenemos

$$w_{c1,2} = \pm \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + w_0^2}$$

ahora en términos del factor de calidad y de la frecuencia natural

$$w_{c1,2} = w_0 \left[\pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right]$$