

## TRANSFERENCIA DE MASA A TRAVÉS DE INTERFACES

### INCORPORACIÓN DE LA DINÁMICA DEL FLUJO EN LAS EXPRESIONES PARA EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA

Prof. Aldo Tamburrino Tavantzis

Las relaciones presentadas para determinar  $K_L$  no permiten predecir la tasa de transferencia a través de la interfaz gas-líquido. Ellas, sin embargo tienen el mérito de ~~ayudar~~ ayudarnos a entender el proceso de transferencia.

Desde el punto de vista de las leyes de conservación, la participación de las características del flujo y del fluido en el fenómeno son evidentes. Las ecuaciones que rigen el problema son:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c \quad 1$$

Donde la hidrodinámica del flujo está representada a través del campo de velocidades,  $\vec{V}$ , el que debe determinarse con la ayuda de las ecuaciones del movimiento del fluido y continuidad:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad 2$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad 3$$

La Ec. 2 incorpora, explícitamente, las

2

N°

FECHA

propiedades del fluido, a través de  $\rho$  y  $\nu$ . Las Ecs. 1-3 son válidas para todo régimen de flujo de un fluido newtoniano. Evidentemente, la solución del sistema Ecs. 1-3, con sus correspondientes condiciones de borde, es prácticamente imposible para casos que se alejan de flujos y condiciones de borde simples.

Al expresar el flujo mediante una expresión del tipo

$$F = K_L \Delta C$$

4

estamos, implícitamente, incorporando toda la dinámica del flujo en el coeficiente  $K_L$ .

~~En los modelos presentados se ha obtenido  $K_L = f(D, \rho)$ , donde  $\rho$  son corresponden a los otros parámetros que define cada modelo. Así, según el modelo de Deort  $K_L = f(D, \rho, \nu, \sigma, \gamma, \mu, \dots)$ , de Amburats  $K_L = f(D, \rho, \nu, \sigma, \gamma, \mu, \dots)$ , de Dabian  $K_L = f(D, \rho, \nu, \sigma, \gamma, \mu, \dots)$ , de Marshall  $K_L = f(D, \rho, \nu, \sigma, \gamma, \mu, \dots)$ , etc.~~

La dependencia funcional de  $K_L$  con los característicos del flujo, del fluido y de la sustancia que se transfiere a través de la interfase podemos obtenerla mediante análisis dimensional. Consideremos la transferencia a través de una superficie libre LIMPIA de un flujo de líquido sobre el que se mueve la fase gaseosa (caso del viento). El flujo de la fase gaseosa se traduce en un esfuerzo de corte sobre la interfase,  $\tau_i$ .  
Propiedades del flujo: longitud y velocidad características  $L$  y  $u$ .  
Propiedades del fluido:  $\nu$  y  $\rho$



3

N°

FECHA

~~De esta manera, la relación del tipo~~ Restringiendo el análisis al proceso de transferencia dominado por la fase líquida, tendremos:

$$K_L = f(D, \nu, \rho, L, u, T_i) \quad 5$$

de donde es fácil formar los siguientes adimensionales

$$K_L^* = \frac{K_L}{u} \quad , \quad Sc = \frac{\nu}{D} \quad , \quad Re = \frac{uL}{\nu} \quad , \quad T_i^* = \frac{T_i}{\rho u^2}$$

o sea, se tiene una relación funcional del tipo

$$K_L^* = \phi(Sc, Re, T_i^*) \quad 6$$

Si debido a la acción del ~~flujo~~ movimiento de la fase gaseosa se generan ondas en la superficie libre, deberemos agregar un número de Froude en la relación funcional (sabemos, desde CI 41A, que el movimiento de las ondas superficiales depende de  $g$ ). Es posible generalizar aún más la relación funcional al tomar en cuenta los efectos que puede tener la tensión superficial en la formación de la superficie libre, la que se asocia al número de Weber. De este modo, una expresión aún más general puede ser:

$$K_L^* = \phi(Sc, Re, T_i^*, Fr, We) \quad 7$$

$$\text{con } Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}} \quad \text{y } We = \frac{\sigma}{\rho u^2 L}$$

4

N°

FECHA

Evidentemente, configuraciones especiales del flujo, y del proceso de transferencia puede incorporar otros parámetros adicionales a la relación 7. Por ejemplo, transferencia de  $O_2$  debido a burbujas ~~de~~ <sup>de</sup>  $O_2$  que ascienden en un cuerpo de agua, transferencia de  $O_2$  debido a mecanismos de recirculación, etc.

Comencemos el análisis con la situación más simple: Transferencia de una sustancia a través de una superficie libre LÍMITE sobre la que no hay un esfuerzo de corte actuando, no existe deformación de la superficie ni ondas ~~de~~ <sup>en</sup> superficiales. De este modo, tenemos

$$K_L^* = \phi(Sc, Re)$$

8

La dinámica del flujo, representada por el número de Reynolds requiere poder definir las longitudes y velocidades características del flujo que condicionen el proceso de transferencia.

Frente a la pregunta: qué velocidad y longitud usamos? en un flujo turbulento? se nos ocurre inmediatamente los dos casos extremos: Escalas integrales (las más grandes que se dan en un flujo turbulento) y las escalas de Kolmogorov (las más pequeñas que existen en un flujo turbulento).

Como se indicó anteriormente mediciones (y análisis teóricos también) indican que  $K_L \propto \nu^{1/2}$  en superficies libres sin esfuerzo de corte sobre ella. Además, el modelo de renovación de la superficie parece ser bastante adecuado, ya que los movimientos ascendentes aleatorios que



5

N°

FECHA

postula ~~de ser~~ se observan en la realidad (ver película que dejaré en U-cursos, tomada por Alan Moulques en el desarrollo de su memoria). De este modo, consideraremos que:

$$K_L \sim \sqrt{D} r$$

y nuestro problema consiste ahora en determinar  $r$ , la tasa de renovación de la superficie.

Nota: Otros adimensionales comunes en transferencia de masa. Es frecuente encontrar la relación  $St$  en términos del número de Stanton, definido como  $St = \frac{K_L}{u}$  (con-

ponde a nuestro  $K_L^*$ ) y en términos del número de Peclet:  $Pe = \frac{uL}{D}$ .

### ESTIMACIÓN DE LA TASA DE REACCIÓN A PARTIR DE LOS GRANDES VÓRTICES (ESCALA INTEGRAL)

Una medida de la escala integral de velocidad es el valor cuadrático medio de las fluctuaciones turbulentas de velocidad:  $RMS_i = \sqrt{u_i'^2}$ , o ~~la RMS~~ intensidad turbulenta  $I_i$ .  
Notar la relación entre la energía cinética turbulenta  $k$  y los  $RMS_i$  (o  $I_i$ ):

$$k = \frac{RMS_u^2 + RMS_v^2 + RMS_w^2}{2}$$

En canales, existe una relación entre los  $RMS_i$  y la velocidad friccional  $u_*$ , la que

6

N°

FECHA

es más fácil de determinar. De este modo, podemos considerar  $u \approx u_*$ .

La escala integral de longitudes, que es una medida del tamaño de los vórtices más grandes existentes en el flujo ~~de la zona de turbulencia~~ escala con la profundidad del escurrimiento, o sea:  $L \propto H$ .

De este modo, consideraciones dimensionales indican que

$$\tau \propto \frac{\mu_*}{H} \quad 9$$

La velocidad friccional se liga con la velocidad media del escurrimiento  $U$  a través de alguna ley de resistencia, por lo que puede escribirse

$$\tau \propto \frac{U}{H} \quad 10$$

(Por ejemplo si consideramos un factor de fricción  $f$ :  $\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{f}{g}}$ . La relación de Chézy para canales da que  $U = c \sqrt{H i}$ , y usando  $u_* = \sqrt{g H i}$  resulta  $\frac{U}{u_*} = \frac{c}{\sqrt{g}}$ , etc.)

De este modo, la tasa de transferencia está dada por

$$K_L \propto \sqrt{D \tau}$$

$$K_L \propto \sqrt{D \frac{u_*}{H}}$$



7

N°

FECHA

Multiplícamos y dividiendo el radical por  $v$ :

$$K_L \sim \sqrt{\frac{\Delta}{v} \frac{v u_* H}{H}}$$

$$\therefore \frac{K_L}{u_*} \sim \sqrt{\frac{\Delta}{v} \frac{v}{u_* H}}$$

$$\therefore S_t \sim S_c^{-1/2} Re_x^{-1/2}, \text{ con } Re_x = \frac{u_* H}{\nu}$$

Evidentemente, para conocer la relación entre  $S_t$  y  $S_c^{1/2} Re_x^{1/2}$ , es necesario información adicional, ~~general~~ proveniente de datos empíricos. Es posible postular algún modelo teórico para buscar dicha relación, pero siempre al final descansa en algún parámetro que debe determinarse experimentalmente.

Fortsche y Pearson (1967) fueron los primeros en proponer, de manera explícita, un modelo basado en los grandes vórtices. Ellos consideraron que en la cercanía de la superficie libre se generan corrientes de circulación (bidimensionales), con un patrón nómada de velocidades (este patrón se impone no es la solución de las ecuaciones del movimiento, sólo se ~~imponen~~ impone que se satisfaga la ecuación de continuidad).

Este campo de velocidades se utiliza en los términos adyectivos de la ecuación de difusión, lo que junto con las condiciones de borde adecuadas debe ser resuelto numéricamente. A partir de sus resultados numéricos, Fortsche y Pearson obtienen:

8

N°

FECHA

$$\frac{K}{U} = 1,46 Pe^{-1/2}$$

12

donde el número de Péclet se define como  $Pe = \frac{UH}{D}$ . La Ec. 12 es equivalente a:

a:

$$\frac{K}{U} = 1,46 Sc^{-1/2} Re^{-1/2}$$

13

ESTIMACION DE LA TASA DE REACCIÓN A PARTIR DE LOS VÓRTICES PEQUEÑOS (ESCALAS DE KOLMOGOROV)

En el extremo de las escalas de turbulencia se encuentran los de Kolmogorov, que corresponden a los más pequeños asociados a la turbulencia. Kolmogorov (1941) brillantemente consideró que a este nivel, los escalos característicos están definidos por la viscosidad ( $\nu$ ) y la tasa de disipación de energía (por unidad de masa),  $\epsilon$ .

De este modo, la escala de longitudes asociada a los vórtices más pequeños es:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

14

la escala de velocidades  $v_\eta = (\nu \epsilon)^{1/4}$

15

y la de tiempo  $\tau = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}$

16



9

N°

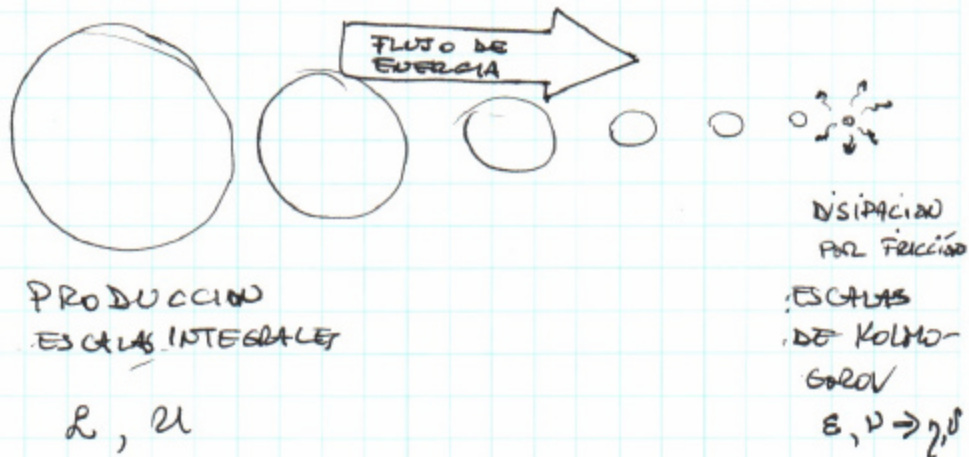
FECHA

De este modo:

$$K_L \sim \sqrt{D\epsilon} \sim \sqrt{D\left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^{1/2}}$$

17

En turbulencia tridimensional, la energía es producida por los vórtices más grandes y disipada por viscosidad por los escalos más pequeños. Podemos suponer que existe una cascata de energía desde los vórtices más grandes hacia los más pequeños, sin disipación en este flujo de energía, estando toda la disipación a cargo de los escalos de Kolmogorov.



Si no hay disipación en los escalos intermedios, entonces:

$$\text{PRODUCCION} = \text{DISIPACION}$$

La <sup>tasa de</sup> producción de energía, por unidad de masa ~~tiempo~~ puede estimarse como  $\frac{u^2}{T}$ , donde

$T$  es la escala integral de tiempo, estimada como:  $T = \frac{L}{u}$ , por lo que la tasa de

10

N°

FECHA

producción queda dada por  $\frac{u^3}{L}$ , lo que es igual a la tasa disipada por los escalos más pequeños, o sea:

$$\varepsilon = \frac{u^3}{L} \quad 18$$

$$\text{Luego } K_L \sim \sqrt{\Delta \left( \frac{u^3}{L \nu} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\nu} \left( \frac{u}{L \nu} \right)^{1/2} u^2}$$

$$K_L \sim \sqrt{\frac{\Delta}{\nu} \left( \frac{\nu}{L u} \right)^{1/2}} u$$

$$\therefore \frac{K_L}{u} \sim \sqrt{\frac{\Delta}{\nu} \left( \frac{\nu}{L u} \right)^{1/4}}$$

Considerando  $u \equiv u_*$  y  $L \equiv H$ , se tiene que ~~para~~ ni en el proceso de transferencia dominan los escalos pequeños.

$$St \sim Sc^{-1/2} Re_*^{-1/4} \quad 19$$

Este análisis basado en los escalos de Kolmogorov fue presentado por primera vez por Banerjee, Scott y Rhodes en 1968, pero se popularizó en 1970 con un trabajo de Lamont y Scott, y generalmente se conoce con el nombre de estos dos últimos investigadores.

Vemos que si el proceso de transferencia se debe a los grandes vórtices, deberíamos encontrar que ~~St~~  $St \sim Re^{-1/2}$ , y si se debe a la acción de los vórtices más pequeños, entonces  $St \sim Re^{-1/4}$ .



11

Nº

FECHA

¿Cuál de los dos modelos es el correcto? La respuesta debemos buscarla en los mediciones. Sin embargo, de los datos experimentales no es posible inferir la respuesta de una manera fácil porque:

- Existe una gran dispersión de los datos y la diferencia de los exponentes del  $Re_x$  no es tan grande ~~q~~ como para diferenciar claramente la tendencia que siguen los datos experimentales. (En escalas log-log, los grandes  $Re_x$  definen una recta de pendiente  $-1/2$  y los pequeños  $Re_x$  una recta de pendiente  $-1/4$ ).

Algunos

- Mediciones muy cuidadosas indican que la tendencia de los datos es  $St \sim Re^{-1/2}$ , mientras que otras mediciones arrojan  $St \sim Re^{-1/4}$ .

Recientemente, algunos autores han propuesto que ambos modelos estarían buenos y la aparente contradicción de los resultados experimentales no sería tal, sino que, en algunos casos el fenómeno de transferencia a través de la interfase está dominado por los escalos integrales, como lo serían los flujos a escalos geofísicos (ríos, canales, etc) y en otros casos ~~dominar~~ la transferencia se debe ~~atribuir~~ a los escalos de Kolmogorov. En este caso estarían los flujos que se generan en las instalaciones experimentales de laboratorio.

12

N°

FECHA

## MODELOS BASADOS EN UN COEFICIENTE DE DIFUSIÓN TURBULENTO

Los modelos que utilizan un coeficiente de difusión turbulento consideran que el transporte debido a las fluctuaciones turbulentas de velocidad y concentración es análogo al molecular, o sea:

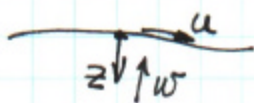
$$F_T = - \overline{w'c'} = D_T \frac{dc}{dz} \quad 20$$

El coeficiente de difusión turbulento está dado por  $D_T = u_c l_c$ , donde  $u_c$  y  $l_c$  son una velocidad y una longitud características. Es fácil darse cuenta que  $l_c$  debe disminuir a medida que nos acercamos a la superficie libre, ya que ella produce un amortiguamiento de la fluctuación turbulenta. De este modo podemos considerar

$$l_c \sim z \quad 21$$

siendo  $z$  un eje solidario con la superficie libre. Como estamos interesados en el transporte en la dirección  $z$ , podemos asociar  $u_c$  a  $w$ .

Veamos cómo es la variación de  $w$  en la cercanía de una superficie libre limpia, sobre la que no hay un esfuerzo de corte aplicado. Consideremos un flujo bidimensional. Sin perder generalidad, podemos escribir la velocidad  $u$  en series de  $z$ :



velocidad  $u$  en series de  $z$ :

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$



13

N°

FECHA

donde los coeficientes  $a_i$  podrían ser funciones de  $x$  (y también de  $t$ , en el caso impermanente). Como no existe esfuerzo sobre la superficie libre, en ella se tiene que  $\tau = 0$ . Además, muy cerca de la superficie libre dominan los efectos viscosos, por lo que podemos calcular el esfuerzo de corte como

$$\tau = \mu \left( \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right)$$

Considerando un escurrimiento uniforme, la condición  $\tau = 0$  indica que

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

o sea 
$$a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots \Big|_{z=0} = 0$$

de donde  $a_1 = 0$ . O sea, cerca de la superficie libre la velocidad  $u$  varía con el cuadrado de  $z$ :

$$u = a_0 + a_2z^2 + \dots \quad 22$$

Pero a nosotros nos interesa conocer  $w$ . Utilizando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial x} z^2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$w = - \frac{\partial a_0}{\partial x} z - \frac{\partial a_2}{\partial x} \frac{z^3}{3} - \dots + \text{cte.}$$

14

N°

FECHA

En el sistema de referencia solidario a la superficie libre se tiene la condición de borde  $z=0$ ,  $w=0$ , lo que significa que  $cte=0$ . Muy cerca de la superficie libre  $z^3 \rightarrow 0$ , por lo que se tiene que la variación de  $w$  con  $z$  es lineal ( $w = -\frac{\partial w}{\partial z} z$ )

$$w \sim z$$

23

De este modo, el coeficiente de difusión turbulenta está dado por

$$D_T = a z^2$$

24

(Notar que, en la cercanía de una frontera sólida, se cumple que  $D_T \sim z^3$ . Esto se debe a que en la pared  $u=0$  ( $\Rightarrow a_0=0$ ) pero  $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = \tau_0$  ( $\Rightarrow a_1 = \frac{\tau_0}{\mu}$ ), por lo que  $w \sim z^2$ )

En este modelo, la ecuación de difusión está dada por

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (D + D_T) \frac{\partial C}{\partial z}$$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (D + a z^2) \frac{\partial C}{\partial z}$$

25

Para el caso ~~para~~ uniforme se tiene

$$(D + a z^2) \frac{dC}{dz} = cte$$

donde la constante es igual al flujo, o sea:



15

N°

FECHA

$$-(D + az^2) \frac{dC}{dz} = F \quad 26$$

$$-dC = F \frac{dz}{D + az^2}$$

$$-\int_{C_{sat}}^{C_0} dC = F \int_0^{\Delta} \frac{dz}{D + az^2}$$

donde  $\Delta$  es una distancia en la que es válida la variación lineal de  $w$ , integrando

$$-(C_0 - C_{sat}) = \frac{F}{\sqrt{aD}} (\arctg(\Delta) - \arctg(0))$$

$$F = \sqrt{aD} A (C_{sat} - C_0) \quad 27$$

obteniendo nuevamente que  $K \sim D^{1/2}$ , como en el modelo de renovación.

El valor del coeficiente  $a$  de la Ec. 24 aún permanece desconocido. Ueda et al. (Int. J. Heat Mass Transf. Vol 20, No 11 27-1136, 1977) Considerando que  $\alpha = 0.1$  y  $L = 0.1H$  obtienen

$$\frac{D_T}{UH} = 526 \left( \frac{z}{H} \right)^2 \quad 28$$

El supuesto dado por Ec. 21 puede ser cuestionado. Es fácil ver que la escala integral de longitud  $l_0$  que interviene en  $D_T$  corresponde a una longitud de mezcla.

Si recordamos lo aprendido en CI 31A,

16

N°

FECHA

La variación lineal de la longitud de mezcla con la distancia a la pared era válida en una región muy cercana a la pared, pero lo suficientemente alejada como para que dominaran los esfuerzos turbulentos sobre los viscosos. Con la consideración de una longitud de mezcla proporcional a la distancia a la pared se obtiene la ley logarítmica de velocidades. Si la pared es hidrodinámicamente lisa, la distribución de velocidades en la zona adyacente a la pared (subcapa viscosa) es lineal. Evidentemente, la distribución de velocidades no cambia bruscamente de la lineal a la logarítmica, sino que lo hace gradualmente, a través de una zona denominada "de amortiguamiento" ("buffer layer"), en la que dominan por igual los esfuerzos de origen viscoso con los turbulentos. En esta zona, la longitud de mezcla no es lineal, y puede considerarse válida la expresión propuesta por van Driest:

$$l = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y}{A}}\right) \quad 29$$

donde  $y$  es la distancia a la pared,  
 $y^+ = \frac{y u_{\tau}}{\nu}$ ,  $A = 26$ ,  $\kappa = 0.4$ .

Con el mismo razonamiento, no hay nada que obligue a ~~pensar~~ pensar que cerca de la superficie libre debe tenerse una variación lineal de  $l_c$ .

[Notar que para  $y$  muy pequeño,



17

N°

FECHA

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$l = \kappa y \left( 1 - \left( 1 - \frac{y^+}{A} + \frac{1}{2} \left( \frac{y^+}{A} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{y^+}{A} \right)^3 + \dots \right) \right)$$

$$l = \kappa \frac{\nu}{u_*} y^+ \left( \frac{y^+}{A} - \frac{1}{2} \left( \frac{y^+}{A} \right)^2 + \dots \right)$$

$$l = \kappa \frac{\nu}{u_*} \left( \frac{y^{+2}}{A} - \frac{1}{2} \frac{y^{+3}}{A^2} + \dots \right)$$

O sea, muy cerca de la pared, en la zona de amortiguamiento:

$$l \sim y^2$$

30

Si consideramos válida la relación de amortiguamiento de van Driest en la cercanía de la superficie libre, entonces

$$l_c \sim z^2$$

por lo que  $D_T \sim \frac{\partial l_c}{\partial z} \sim \omega l_c \sim z^3$

$$D_T = a' z^3$$

31

de donde resulta que el flujo está dado por

$$F = -(D + a' z^3) \frac{dl}{dz}$$

32

$$\int_{c_{sat}}^{c_0} dc = -F \int_0^{\Delta} \frac{dz}{D + a' z^3}$$

33

18

N°

FECHA

$$\int_0^{\Delta} \frac{dz}{D + a'z^3} = \frac{1}{6a' \left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} \ln \left( \frac{\left(\left(\frac{D}{a'}\right)^{1/3} + z\right)^2}{\left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3} - \left(\frac{D}{a'}\right)z + z^2} \right) \Big|_0^{\Delta} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3} a' \left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2z - \left(\frac{D}{a'}\right)^{1/3}}{\sqrt{3} \left(\frac{D}{a'}\right)^{1/3}} \right) \Big|_0^{\Delta}$$

$$\int_0^{\Delta} \frac{dz}{D + a'z^3} = \frac{1}{6a' \left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} \ln \left( \frac{\left(\left(\frac{D}{a'}\right)^{1/3} + \Delta\right)^2}{\left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3} - \left(\frac{D}{a'}\right)\Delta + \Delta^2} \right) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} a' \left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\Delta - \left(\frac{D}{a'}\right)^{1/3}}{\sqrt{3} \left(\frac{D}{a'}\right)^{1/3}} \right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3} a' \left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} \operatorname{arctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

O sea, podemos decir que

$$\int_0^{\Delta} \frac{dz}{D + a'z^3} = \frac{-A'}{\left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} \quad 34$$

Ec. 33 :  $\Delta C = \frac{A'}{\left(\frac{D}{a'}\right)^{2/3}} F$

$$F = \frac{D^{2/3}}{a'^{2/3} A'} \Delta C \quad 35$$

De donde resulta que  $K \sim D^{2/3}$



19

N°

FECHA

Notar que si se considera la relación de van Driest en la cercanía de una superficie sólida, resulta que

$$D_T \sim z^4$$

y tendríamos que integrar  $\int_0^A \frac{dz}{D + a'' z^4}$

Es fácil ver que 
$$\int_0^A \frac{dz}{D + a'' z^4} = \left(\frac{D}{a''}\right)^{1/4} \frac{1}{4\sqrt{2}D} \left[ \ln \left( \frac{z^2 + \sqrt{2} \left(\frac{D}{a''}\right)^{1/4} z + \left(\frac{D}{a''}\right)^{1/2}}{z^2 - \sqrt{2} \left(\frac{D}{a''}\right)^{1/4} z + \left(\frac{D}{a''}\right)^{1/2}} \right) + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{2} \left(\frac{D}{a''}\right)^{1/4} z}{\left(\frac{D}{a''}\right)^{1/2} - z^2} \right) \right] \Big|_0^A$$

o sea  $F \approx D \Delta C$ , resultando  $K \sim D$ .

20

N°

FECHA

## SOLUCION DE LAS ECUACIONES IMPERMANENTES DE BALANCE DE MASA

Hanratty y sus alumnos abordaron el ~~análisis~~ estudio y determinación del coeficiente de transferencia de masa a partir de las ecuaciones impermanentes de balance de masa que rigen el flujo turbulento. A continuación se presentará el desarrollo de las ecuaciones linealizadas del problema, y las soluciones que se obtienen. Hanratty y su equipo también abordó el problema considerando los términos no lineales, pero el enfoque en este caso fue numérico.

Una aproximación tipo capa límite reduce la ecuación de difusión a:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Consideremos las variables adimensionales:

$$c^+ = \frac{c_i - c}{c_i - c_b}$$

i: interfase  
b: masa de fluido bien mezclada

$$z^+ = \frac{z u_*}{\nu}$$

$$w^+ = \frac{w}{u_*}$$

$$t^+ = \frac{t u_*^2}{\nu}$$



21

N°

FECHA

Reemplazando en Ec. 1 resulta:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + w^* \frac{\partial c^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c^*}{\partial z^{*2}} \quad (2)$$

Para mayor comodidad, de aquí en adelante no se escribirán los superíndices \* y + para denotar cantidades adimensionales, o sea, escribiremos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (2')$$

Demostramos que para el caso de una superficie libre se cumple que

$$w = \beta z, \text{ con } \beta(t) \quad (3)$$

El flujo a través de la interfase está dado por (medio temporal):

$$F_d = K_d \Delta \bar{C}_d = D \left. \frac{d \bar{C}_d}{d z_d} \right|_{z_d=0} \quad (4)$$

$d \rightarrow$  "con dimensiones"

$$K_d = \frac{D}{\Delta C_d} \left. \frac{d \bar{C}_d}{d z_d} \right|_{z_d=0} \quad (5)$$

Adimensionalizando con  $u_*$  y  $\nu$ :

$$K = \frac{K_d}{u_*} = \frac{D}{\nu} \frac{1}{\Delta C_d} \left. \frac{d \bar{C}_d}{d z} \right|_{z=0} \quad (6)$$

$$\text{Pero } \frac{d}{dz} \left[ \frac{\bar{C}_d}{\Delta C_d} \right] = \frac{d \bar{C}}{d z} \quad (7)$$

22

N°

FECHA

O sea: 
$$K = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\bar{C}}{dz} \Big|_{z=0} \quad (8)$$

Volviendo a Ecs. 2' y 3:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \beta z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (9)$$

$$c = \bar{c} + c' \quad , \quad \beta = \bar{\beta} + \beta' \quad , \quad \bar{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + \beta' z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} + \bar{\beta} z \frac{\partial c'}{\partial z} = \frac{1}{\rho_c} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

Considerando que las fluctuaciones son pequeñas, es posible despreciar el término  $\beta' z \frac{\partial c'}{\partial z}$ , quedando la ecuación linealizada:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{\beta} z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_c} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \right) \quad (11)$$

Promediando sobre la turbulencia, por E. 11 queda:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \quad (12)$$

Si se considera un flujo estacionario,  $\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = 0$   
por lo que  $\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} = 0$  (o sea  $\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \text{cte}$ ,  
siendo igual a Flujo a través de la interfase)



23

N°

FECHA

Ec. 11 - Ec. 12 :

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \beta' z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \quad (13)$$

Eliminando los primos para describir las fluctuaciones turbulentas:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \beta z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (13')$$

Observamos q Ec. 8. Un análisis de órdenes de magnitud indicaron que  $\bar{c} \sim 1$  y  $z \sim Sc$  de este modo

$$K \sim \frac{1}{Sc} \frac{1}{Sc} \quad (14)$$

Podemos definir un coeficiente INSTANTANEO de transferencia de masa como:

$$k = \frac{1}{Sc} \left. \frac{dc}{dz} \right|_{z=0} \quad (15)$$

ANÁLISIS DE LA ECUACION  $\frac{\partial c}{\partial t} + \beta z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$

- Análisis para las frecuencias grandes

En este caso, el término instantáneo de la Ec. 13' es importante

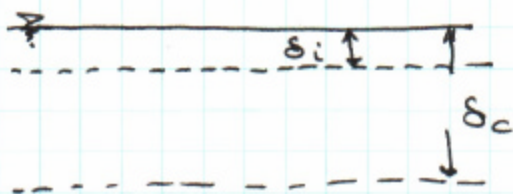
Muy cerca de la superficie libre existe una región donde los efectos de difusión dominan sobre el transporte turbulento. Denominemos el

24

N°

FECHA

espesor de esta región  $\delta_i$



(notar la analogía con la subcapa viscosa de una capa límite turbulenta en una pared lisa)

Podemos estimar el espesor  $\delta_i$  de la siguiente manera. En la región donde difusión domina sobre el transporte turbulento se tiene:

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{1}{\delta_c} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (16)$$

Sea  $\omega$  la frecuencia de las fluctuaciones turbulentas, entonces un análisis de órdenes de magnitud de la Ec. 16 da:

$$\omega c' \sim \frac{1}{\delta_c} \frac{c'}{\delta_i^2}$$

$$\therefore \delta_i^2 \sim \frac{1}{\delta_c \omega} \quad (17)$$

Volvamos a la Ec. 13'. En la región donde el transporte turbulento domina sobre el molecular, y es importante el efecto de fluctuaciones de frecuencias grandes, la Ec. 13' se reduce a

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \beta \bar{c} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \approx 0 \quad (18)$$



25

N°

FECHA

Un análisis de órdenes de magnitud indica que

$$\frac{\partial c}{\partial t} \sim \omega c$$

$$\beta \approx \frac{dc}{dz} \sim \beta \delta_c K \delta_c \sim \beta$$

De este modo Ec. 18 indica que

$$\omega c \sim \beta$$

O sea

$$c \sim \frac{\beta}{\omega} \quad (19)$$

Ec. 19 nos da una idea de la fluctuación de concentración.

El gradiente de la fluctuación de concentración podemos estimarlo como:

$$\frac{\partial c}{\partial z} \sim \frac{c}{\delta_c} \sim \frac{\beta}{\omega \delta_c} \quad (20)$$

De donde obtenemos para el coeficiente de transferencia instantáneo: (Ec. 15):

$$k = \frac{1}{\delta_c} \frac{dc}{dz} \Big|_{z=0} \sim \frac{1}{\delta_c} \frac{\beta}{\delta_c \omega} \quad (21)$$

$$\text{Ec. 14 : } K \sim \frac{1}{\delta_c \delta_c}$$

$$\frac{\text{Ec. 21}}{\text{Ec. 14}} : \frac{k}{K} \sim \frac{\beta}{\omega} \quad (22)$$

26

N°

FECHA

Si la Ec. 22 la multiplicamos por su complejo conjugado  $(\cdot)^c$ , podemos obtener una relación entre el espectro  $k$  y  $\beta$  para el caso en que dominan las frecuencias grandes:

$$\left(\frac{k}{k}\right)\left(\frac{k}{k}\right)^c \sim \left(\frac{\beta}{\omega}\right)\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^c \quad (23)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{S_k(\omega)}{k^2} \sim \frac{S_\beta(\omega)}{\omega^2} \quad (24)$$

donde  $S$  denota al espectro. La Ec. 24 es importante, ya que nos indica que el espectro de las fluctuaciones turbulentas de transferencia a través de la interfase varía como el espectro de las fluctuaciones del gradiente vertical de la componente vertical de velocidad, dividido por  $\omega^2$ .