TRANSFERENCIA DE MASA A TRAVÉS DE INTERFACES

REAREACIÓN EN RÍOS Y CANALES. RELACIONES EMPÍRICAS

Prof. Aldo Tamburrino Tavantzis

La ecuación de conservación de O_2 disuelto en un determinado volumen de control de un cauce puede escribirse como:

$$\frac{dM}{dt} = F_{TN} \qquad (1)$$

donde $M = \forall C_B(t)$ es la masa de O_2 en el volumen $\forall$. Se considera que existe mezcla completa en el volumen y que se tiene en él una concentración C_B

F_{TN} es el flujo total neto de O_2 a través de la superficie libre. Si A es el área de la superficie libre, C_S es la concentración de saturación y K_L es la tasa de transferencia, se cumple que

$$F_{TN} = FA = K_L (C_S - C_B) A \qquad (2)$$

De donde resulta que

$$\forall \frac{dC_B}{dt} = K_L A (C_S - C_B) \qquad (3)$$

$$\frac{dC_B}{dt} = K_L \frac{A}{\forall} (C_S - C_B) \qquad (4)$$

$\frac{\forall}{A}$ corresponde a la profundidad media del volumen de agua: $h = \frac{\forall}{A}$

2-

por lo que se tiene

$$\frac{dC_D}{dt} = \frac{K_L}{h}\left(C_S - C_D\right) \qquad (5)$$

es frecuente encontrar las expresiones de reaireación en términos del coeficiente volumétrico de reaireación, k_2, definido como

$$k_2 = \frac{K_L}{h} \qquad (6)$$

Notar que las unidades de k_2 son T^{-1}.

Existen una gran cantidad de relaciones empíricas para determinar k_2, pero podemos agruparlos en dos grupos: Relaciones dimensionalmente homogéneas y relaciones no homogéneas desde el punto de vista dimensional.

Con esto en mente, resulta obvio que lo primero que debemos hacer es un enfoque dimensional del problema.

Las variables involucradas en el problema son:

Flujo: Velocidad característica U
Longitud característica L.

Fluido: Viscosidad cinemática: ν
Densidad: ρ
Tensión superficial: σ

Fuerza motriz debido a g

3

Cauce: Forma e irregularidades: FF
Pendiente: i
Rugosidad: k_s
Ancho superficial: W

Tasa de reaireación: k_2

Otros: Temperatura: T
Viento: v_v

El efecto de temperatura podemos ligarlo a una tasa estándar de referencia a una temperatura dada mediante la ecuación de Van't Hoff-Arrenius. Generalmente se toma como referencia $T = 20°C$.

$$k_2(T) = k_2(20°C)\ \theta^{T-20} \qquad (*)$$

donde $\theta = 1{,}024$, y T en °C.

De este modo podemos formar los siguientes adimensionales,

$$\Pi_1 = F.F. \qquad \Pi_2 = i \qquad \Pi_3 = \frac{v_c}{v_v} \qquad \Pi_4 = \frac{W}{L}$$

$$\Pi_5 = F_r = \frac{v_c}{\sqrt{gL}} \qquad \Pi_6 = R_e = \frac{v_c L}{\nu} \qquad \Pi_7 = \frac{k_s}{L}$$

$$\Pi_8 = \frac{\nu}{D} = S_c \qquad \Pi_9 = W_e = \frac{\sigma}{\rho v_c^2 L} \qquad \Pi_{10} = \frac{k_2 L}{v_c}$$

4

o sea:

$$\frac{k_2 L}{v_c} = \phi\left(F.F.,\ i,\ \frac{v_c}{v_v},\ \frac{W}{L},\ Fr,\ Re,\ Sc,\ We,\ \frac{k_s}{L}\right) \qquad (7)$$

Hay que notar que la ley de resistencia relaciona F.F., i, Fr, Re y k_s/L, por lo que es posible excluir uno de esos parámetros del análisis, ya que se puede expresar en términos de los otros.

Generalmente los cauces son muy anchos y la sección puede considerarse que no varía mucho entre cauces. Si este es el caso, nos independizamos de F.F. Del mismo modo, cauce muy ancho hace que el parámetro W/L no sea relevante.

Si hay efecto del viento podría elegirse otra variable que lo caracterice en vez de v_v, por ejemplo el esfuerzo de corte que el viento ejerce sobre la superficie libre. Despreciando el efecto del viento (caso sin viento), podemos simplificar la relación (7).

Respecto a la longitud característica, la que se usa más frecuentemente en la práctica es la altura de escurrimiento: $L = h$. Para la velocidad característica, es frecuente encontrar indistintamente la velocidad media del flujo $v_c = U$ o la velocidad friccional $v_c = u_*$. Recordar que U y u_* están relacionados entre sí mediante la ley de resistencia, por lo que da lo mismo usar una u otra.

Debido que en los problemas de reaireación en cauces se desea saber el flujo de O_2 de la atmósfera al agua, generalmente las expresiones resultan independientes de S_c (o sea, es sólo para un valor de S_c). El argumento análogo puede darse para prescindir de W_e. De este modo la relación 7 se ha reducido a:

$$\frac{k_2 h}{v_c} = \phi\left(\mathbb{F}r, Re, \frac{k_s}{h}\right) \qquad (8)$$

o $$\frac{k_2 h}{v_c} = \phi\left(i, Re, \frac{k_s}{h}\right) \qquad (9)$$

o $$\frac{k_2 h}{v_c} = \phi\left(\mathbb{F}r, Re, i\right) \qquad (10)$$

o $$\frac{k_2 h}{v_c} = \phi\left(\mathbb{F}r, \frac{k_s}{h}, i\right) \qquad (11)$$

Algunas relaciones empíricas que se encuentran en la literatura son las siguientes:

Krenkel y Orlob (1963): $$k_2 = 1.141 \times 10^{-4} (U i g)^{0.408} H^{-0.66} \qquad (12)$$

donde k_2 es a 20°C en 1/min
U está en pies/minuto
g pies/minuto²
H en pies.

Thackston (1966): $k_2 = 0.000215 \frac{u_*}{h}$

k_2 1/s, u_* ft/s., H fts.

6

Thackston y Krenkel (1969): $k_2 = 0,000125\,(1+F_r^{1/2})\dfrac{u_*}{h}$

$F_r = \dfrac{U}{\sqrt{gh}}$, k_2 en 1/s
u_* en ft/s , u_* en m/s
h en ft. , h en m/s

da lo mismo, sólo deben ser unidades coherentes ya que $\dfrac{k_2 h}{u_*} = 0,000125\,(1+F_r^{1/2})$ es dimensionalmente homogénea

Churchill, Elmore y Buckingham (1962)

$$k_2 = 5,026\, U^{0,969}\, h^{-1.673}$$

k_2 es a 20°C en 1/día
U es en ft/s
h es en ft.

Owens, Edwards y Gibbs (1964):

$$k_2 = 10,90\, U^{0,73}\, h^{-1.75}$$

k_2 es a 20°C en 1/día
U es en ft/s
h es en ft.

Langbein y Durum (1967)

$$k_2 = 3,3\,\frac{U}{h^{1.33}}$$ a 20°C, 1/día
U en ft/s, h en ft.

Isaacs y Gundy (1968)

$$k_2 = a\,\frac{U}{h^{3/2}}$$ a 20°C, 1/día

a depende del conjunto de datos analizado.
Datos de Isaacs y Gundy: $a = 3,053$
Datos de Churchill, Elmore y Buckingham: $a = 3,739$
Datos de Krenkel: $a = 2,440$

7

Negulescu-Rojanski: $k_2 = 4.74\left(\frac{U}{h}\right)^{0.85}$

k_2 en 1/día, U en ft/s, h en ft.

Recientemente Thackston y Dawson (2001) revisaron los ajustes de Thackston y Krenkel y encontraron que estos últimos sobreestiman la transferencia para Froude pequeños, y proponen la siguiente relación corregida:

$$k_2 = 0.000025\left(1+9\,F_r^{1/4}\right)\frac{u_*}{h}$$

$$\frac{k_2 h}{u_*} = 0.000025\left(1+9\,F_r^{1/4}\right)$$

(dimensionalmente homogéneo)

Lau (1972) $\quad \frac{k_2 h}{U} = 0.0126\left(\frac{u_*}{U}\right)^3$

Bennett y Rathbun (1972) $\quad k_2 = 106{,}05\,\frac{U^{0.413}\,S^{0.273}}{h^{1.408}}$

k_2 en 1/día

Los parámetros adimensionales de la relación 7 (4 8 a 11) pueden ser recombinados para dar origen a otros. Considerando $u_c = u_*$

$$Re \cdot Sc = \frac{u_* h}{\nu}\,\frac{\nu}{D} = \frac{u_* h}{D} = Pe$$

$$\frac{k_2 h}{u_*} = \frac{K_L}{h}\,\frac{h}{u_*} = \frac{K_L}{u_*} = St.$$

Gulliver y Halverson (1989) proponen:

$$St = 0.63\, Pe^{-1/2} \quad , Re > 4500$$

$$St = 9.4 \times 10^{-3}\, Sc^{-1/2} \quad , Re < 4.500.$$

OTROS EFECTOS QUE ALTERAN EL COEFICIENTE DE REAIREACION.

Existen al menos otros dos efectos que aumentan el valor del coeficiente de reaireación: la macrorugosidad del lecho y el efecto del viento.

EFECTO DE LA RUGOSIDAD DEL LECHO

La incorporación de la rugosidad del lecho de manera explícita no es frecuente en las relaciones para determinar K. En general, la rugosidad se considera de manera indirecta mediante las variables ligadas a la ley friccional o u_*. El efecto toma real importancia cuando se tienen macrorugosidades o sea asperezas de tamaños que escalan con la profundidad del flujo, como sucede en cauces de poca profundidad con lechos de grava. En este caso, es posible que estructuras del flujo generados por estas macrorugosidades interfieran con la superficie libre. ~~Uno de~~ Entre los trabajos que pueden

PLANTA

mencionarse están los de Moog y Jirka (1999, J. Hyd. Engng, Vol 125, pp 11-16), (2002, Geophy. Monog. Series AGU, Vol 127, pp 371-375)

Ellos encontraron que, a partir de un cierto número de Froude asociado a la rugosidad, la renovación de la superficie no es un fenómeno importante, dominando las estructuras generadas por las macrorugosidades.

Definiendo
$$Fr_E = \frac{q}{\sqrt{g(H-h_E)^3}}$$

donde q es el caudal unitario, H es la altura media del flujo y h_E es la altura de la macrorugosidad, se tiene que para $Fr_E > 1{,}4$

$$K_L^+ S_c^{0,5} = 0.0071 + 0.023\, Fr_E$$

($K_L^+ = K_L/u_*$).

EFECTO DEL VIENTO

La acción del viento también favorece el intercambio de oxígeno disuelto a través de la interfaz. Chu y Jirka (1995, Third Int. Symp. Air-Water Gas Transfer, pp 79-88, 2003, J. Env. Engng. Vol 129, Nº 12, pp. 1129-1136) proponen que el efecto del viento puede superponerse al de la corriente. En sus artículos consideran los resultados de Deacon para evaluar el coeficiente de reaireación debido al viento:

$$K_{Lv} = \alpha \, u_{*a} \qquad , \quad u_{*a} \lesssim \begin{matrix}15\\20\end{matrix} \text{ cm/s.}$$

$\alpha = 4{,}38 \times 10^{-5}$ (datos de Liss y Kraft)
$\alpha = 4.60 \times 10^{-5}$ (Deacon)
K_L es en cm/s
u_{*a} es la velocidad friccional del viento sobre la superficie líquida $\left(u_{*a}^2 = \frac{\tau_{su}}{\rho_{aire}}\right)$

Para $u_{*a} > 15$ cm/s, la superficie libre se torna aerodinámicamente rugosa y la relación es:

$$K_{Lv} = \beta \, u_{*a}^2 \qquad , \quad u_{*a} \geq 20 \text{ cm/s}$$

donde K_L está en m/día, u_{*a} en cm/s
$\beta = 1{,}83 \times 10^{-3}$.

Según Chu y Jirka la reaireación debido sólo a la corriente puede determinarse de

$$\frac{K_{Lc}}{u_{*b}} = 7{,}87 \times 10^{-3} \, Re_{*b}^{-1/4}$$

donde u_{*b} es la velocidad friccional asociada al fondo del cauce $\left(u_{*b} = \frac{\tau_b}{\rho_{agua}}\right)$ y

$$Re_{*b} = \frac{u_{*b} H}{\nu_{agua}} .$$

El coeficiente de transferencia de los dos efectos combinados es simplemente la superposición lineal de K_{Lv} y K_{Lc}:

$$K_L = K_{Lv} + K_{Lc}$$

Una relación clásica es la de Elouldaoly y Plate (1972), quienes propusieron para velocidades del viento superiores a 2 m/s:

$$\frac{K_L}{u_{*b}} = 3{,}13 \times 10^{-8} \, \mathrm{Re}_{*AIRE}$$

donde $\mathrm{Re}_{*AIRE} = \frac{u_{*a} H}{\nu_{aire}}$ (H es la profundidad del flujo).

El límite de 2 m/s dado a la relación anterior es difícil de interpretar, ya que corresponde a una velocidad media del túnel de viento.

Con el objeto de determinar u_{*a} en las relaciones anteriores, en la práctica es necesario tener alguna relación que la ligue a alguna velocidad medida frecuentemente en meteorología. Para este efecto puede considerarse la relación de Wu que relaciona u_{*a} con la velocidad del viento medida a 10 m, U_{10}:

$$u_{*a} = 0{,}01 U_{10} (8 + 0{,}65 U_{10})^{1/2}$$

En la relación anterior, tanto u_{*a} como U_{10} están en m/s.