



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

**Flujo Crítico**  
(Apuntes de Clases)

por Marcos Contreras

Julio 1999

## Flujo crítico y altura crítica

Según Ven Te Chow (1994) el estado crítico del flujo a través de una sección de canal se caracteriza por varias condiciones importantes. En resumen, éstas son:

1. La energía específica es mínima para un caudal determinado.
2. El caudal es máximo para una determinada energía específica.
3. La fuerza específica es mínima para un caudal determinado.
4. La altura de velocidad es igual a la mitad de la “profundidad hidráulica” ( $D = \Omega/T$ ) en un canal de baja pendiente.
5. El número de Froude es igual a la unidad, si existe distribución uniforme de velocidades.
6. La velocidad de flujo en un canal de baja pendiente con distribución uniforme de velocidades es igual a la celeridad de pequeñas ondas gravitacionales causadas por perturbaciones locales en aguas poco profundas.

A continuación se describirá en forma breve como es posible demostrar estas condiciones a partir de una secuencia de definiciones y deducciones.

### Concepto de energía y altura crítica

La energía total por unidad de peso en la sección del canal abierto como el señalado en la Figura 1, de cualquier línea de corriente que pasa a través de una sección del canal puede expresarse como la altura total en metros de agua, que es igual a la suma de la elevación por encima del nivel de referencia, la altura de presión y la altura de velocidad. En general, cada línea de corriente que pasa a través de una sección del canal tendrá una altura de velocidad diferente, debido a la distribución no uniforme de velocidades en flujos reales. Sólo en un flujo paralelo ideal con distribución uniforme de velocidades, la altura de velocidad puede ser idéntica para todos los puntos de la sección transversal.

En el caso del flujo gradualmente variado, sin embargo, para propósitos prácticos, puede suponerse que las alturas de velocidad para todos los puntos de la sección del canal son iguales y, con el fin de tener en cuenta la distribución no uniforme de velocidades, puede utilizarse el coeficiente de energía o de *Coriolis* para corregir ese efecto. Luego, la energía por unidad de peso total en la sección del canal es

$$H = z + h \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

donde  $V$  es la velocidad media y para canales con pendiente baja,  $\theta \approx 0$ , es decir  $\cos \theta \approx 1$ . Luego, la energía total por unidad de peso en la sección del canal es

$$H = z + h + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2)$$

La *energía específica* en una sección del canal se define como la energía por unidad de peso (en este caso por kilogramo de agua) en cualquier sección de un canal medida con respecto al fondo de éste. Luego de acuerdo a la ecuación 1, con  $z = 0$ , la energía específica se convierte en

$$E = h \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (3)$$

o, para un canal de pendiente pequeña ( $\cos \theta \approx 1$ ) y distribución de velocidades uniforme ( $\alpha = 1$ ),

$$E = h + \frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

la cual indica que la energía específica es igual a la suma de la altura del agua más la altura de velocidad. Para propósitos de simplicidad, el siguiente análisis se basará en la ecuación 4 para un canal de pendiente pequeña.

Como  $V = Q/\Omega$ , la ecuación 4 puede escribirse como:

$$E = h + \frac{Q^2}{\Omega^2 2g}$$

puede verse que, para una sección de canal y un caudal  $Q$  determinados, la energía específica en una sección de canal sólo es función de la profundidad de flujo  $h$ .

Cuando la profundidad de flujo  $h$  se grafica contra la energía específica para una sección de canal y un caudal determinados, se obtiene una curva de energía específica como la de la figura 2. Esta curva tiene dos ramas, AC y BC. La rama AC se aproxima asintóticamente

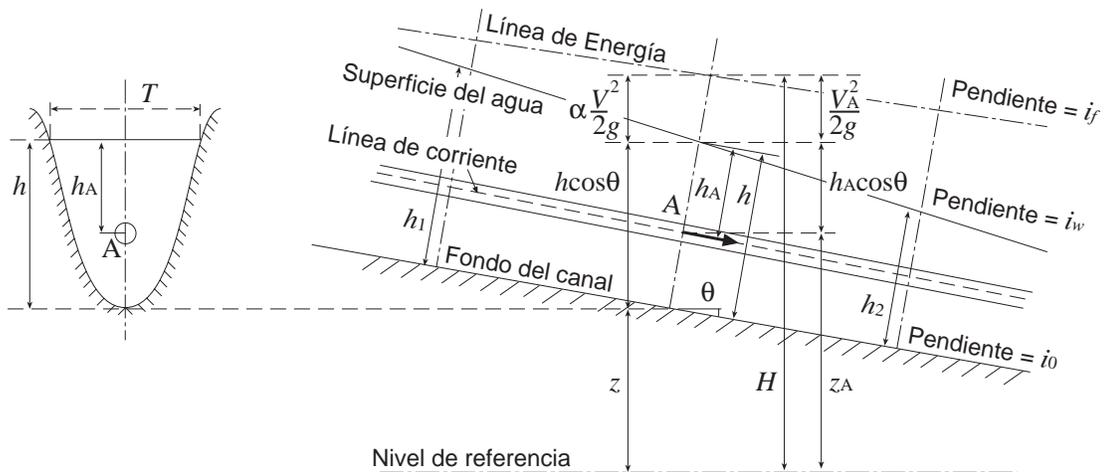


Figura 1: Energía de un flujo gradualmente variado en canales abiertos.

al eje horizontal hacia la derecha. La rama BC se aproxima a la línea OD a medida que se extiende hacia arriba y hacia la derecha. La línea OD es una línea que pasa a través del origen y tiene un ángulo de inclinación igual a  $45^\circ$ . Para un canal de pendiente alta, el ángulo de inclinación de la línea OD será diferente de  $45^\circ$ . En cualquier punto P de la curva de energía ACB, la ordenada representa la profundidad  $h$  y la abscisa representa la energía específica  $E$ , que es igual a la suma de la altura de presión  $h$  y la altura de velocidad  $V^2/2g$ .

La curva muestra que, para una energía específica determinada  $\hat{E}$ , existen dos posibles profundidades, la *profundidad baja*  $h_1$  y la *profundidad alta*  $h_2$ . La profundidad baja es la profundidad alterna de la profundidad alta, y viceversa. En el punto C, la energía específica es mínima. Más adelante se probará que esta condición de energía específica mínima corresponde al estado crítico de flujo. Por consiguiente, en el estado crítico es claro que las dos profundidades alternas se convierten en una, la cual es conocida como **altura crítica**  $h_c$ . Cuando la altura de flujo es mayor que la altura crítica, la velocidad de flujo es menor que la velocidad crítica para un caudal determinado y, por consiguiente, el flujo es *subcrítico*. Cuando la altura del flujo es menor que la altura crítica, el flujo es *supercrítico*. Por tanto,  $h_1$  es la altura de un flujo supercrítico y  $h_2$  es la altura de un flujo subcrítico.

Si el caudal cambia, existirá un cambio correspondiente en la energía específica. Las dos curvas A'B' y A''B'', ver figura 2, representan posiciones de la curva de energía específica cuando el caudal es menor y mayor, respectivamente, que el caudal utilizado para la construcción de la curva AB.

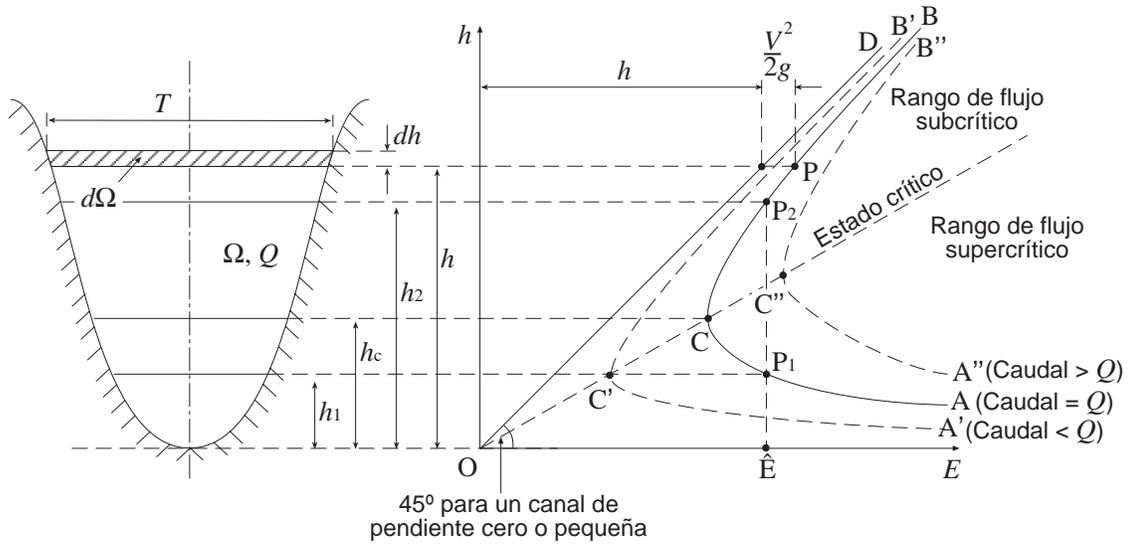


Figura 2: Curva de energía específica.

## Criterio para el estado crítico de flujo

El efecto de la gravedad sobre el estado de flujo se representa por la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas gravitacionales. Esta relación está dada por el *número de Froude*, definido como

$$\mathbb{F} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad (5)$$

donde,

$V$ : es la velocidad media del flujo en m/s

$g$ : es la aceleración de gravedad en m/s<sup>2</sup>

$L$ : es la longitud característica en m

En el flujo de canales abiertos, la longitud característica se hace igual a la *profundidad hidráulica*  $D$ , la cual está definida como el área de la sección transversal del agua perpendicular a la dirección del flujo en el canal dividida por el ancho de la superficie libre. Para el caso de la figura 1 la profundidad sería,

$$D = \frac{\Omega}{T}$$

Cuando  $\mathbb{F}$  es igual a la unidad, la ecuación 5 se convierte en

$$V = \sqrt{gD} \quad (6)$$

y se dice que el flujo está en su estado *crítico*.

Si  $\mathbb{F}$  es menor que la unidad, o  $V < \sqrt{gD}$ , el *flujo es subcrítico*. En este estado el papel jugado por las fuerzas gravitacionales es más pronunciado; por tanto, el flujo tiene una velocidad baja y a menudo se describe como tranquilo y de corriente lenta.

Si  $\mathbb{F}$  es mayor que la unidad, o  $V > \sqrt{gD}$ , el *flujo es supercrítico*. En este estado las fuerzas inerciales se vuelven dominantes; el flujo tiene una alta velocidad y se describe usualmente como rápido, ultrarápido o de torrente.

El estado crítico de flujo ha sido definido por tanto como la condición para la cual el número de Froude es igual a la unidad. Una definición más común es que éste es el estado de flujo para el cual la energía específica es mínima para un caudal determinado. Un criterio teórico para el flujo puede desarrollarse a partir de esta definición como se describe a continuación.

Como  $V = Q/\Omega$ , la ecuación 4, la cual es la ecuación para la energía específica en un canal de pendiente baja con  $\alpha = 1$ , puede escribirse como

$$E = h + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad (7)$$

Al derivar con respecto a  $h$  y al notar que  $Q$  es constante,

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{d\Omega}{dh} = 1 - \frac{V^2}{g\Omega} \frac{d\Omega}{dh}$$

El diferencial de área mojada  $d\Omega$  cerca a la superficie libre, ver figura 2, es igual a  $Tdh$ , entonces  $d\Omega/dh = T$ , y la profundidad hidráulica es  $D = \Omega/T$ ; luego la anterior ecuación se convierte en

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{V^2 T}{g\Omega} = 1 - \frac{V^2}{gD}$$

En el estado crítico de flujo la energía específica es mínima, o  $dE/dh = 0$ , la anterior ecuación, por consiguiente da (si se ordena y divide por 2)

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \quad (8)$$

Éste es el criterio para flujo crítico, el cual establece que *en el estado de flujo crítico la altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica*. La anterior ecuación también se escribe como  $V/\sqrt{gD} = 1$ , lo cual significa que  $\mathbb{F} = 1$ ; ésta es la definición de flujo dada anteriormente por la ecuación 6. Si el anterior criterio va a utilizarse en cualquier problema, deben satisfacerse las siguientes condiciones:

1. Canal con pendiente baja ( $\cos \theta \approx 1$ )
2. Coeficiente de energía supuesto igual a la unidad ( $\alpha = 1$ )
3. Flujo paralelo o gradualmente variado

Los análisis sobre el estado de flujo se han referido principalmente a una sección particular de canal, conocida como sección crítica. Si el estado crítico del flujo existe a través de toda la longitud del canal o a lo largo de un tramo de éste, el flujo en el canal es un *flujo crítico*. Debido a que, tal como se indicó mediante la ecuación 8 de criterio de flujo crítico, la profundidad del flujo crítico llamada altura crítica, depende de los elementos geométricos  $\Omega$  y  $D$  de la sección de canal cuando el caudal es constante, la altura crítica en un canal prismático con pendiente uniforme será la misma en todas las secciones, y el flujo crítico en un canal prismático deberá ser por consiguiente flujo uniforme. Para esta condición, la pendiente del canal que mantiene un determinado caudal con una altura uniforme y crítica se conoce como *pendiente crítica*  $i_c$ . Una pendiente del canal menor que la pendiente crítica producirá un flujo más lento de naturaleza subcrítica para el caudal determinado y, por consiguiente, se conoce como *pendiente suave o subcrítica*. Una pendiente mayor que la pendiente crítica producirá un flujo más rápido de naturaleza supercrítica y se conoce como *pendiente fuerte o supercrítica*.

Un flujo en Estado Crítico o cerca de él es inestable. Esto se debe a que un pequeño cambio de energía específica en estado crítico o cerca de él, producirá un cambio grande en

la profundidad. Este hecho también puede identificarse en la curva de energía específica de la Figura 2. Como la curva es casi vertical cerca a la profundidad crítica, un ligero cambio en la energía cambiaría la profundidad a profundidades alternas mucho más pequeñas o más grandes, correspondientes a la energía específica después del cambio. Nótese también que cuando el flujo está cerca del estado crítico, la superficie del agua aparece inestable y ondulada. Por lo general, tales fenómenos son causados por los pequeños cambios en energía debido a las variaciones en la rugosidad del canal, la sección transversal, la pendiente o algunos depósitos de sedimentos o basuras. Si en el diseño de un canal se encuentra que la profundidad es igual o muy cercana a la altura crítica a lo largo de una gran longitud del canal, la forma o la pendiente del canal deben modificarse, si es posible, para asegurar una mayor estabilidad.