



Profesor: Pablo Barceló

Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter

Fecha: 01 de Abril

# Auxiliar 6: Combinaciones y Probabilidades

## 1 Materia

### 1. r-permutación

- (a) Una r-permutación es un arreglo ordenado de r objetos.
- (b) Denotamos por  $P(n, r)$  el número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos.
- (c)  $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

### 2. r-combinación

- (a) Una r-combinación de elementos de un conjunto es un subconjunto de este con r elementos.
- (b) Denotamos el número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos por  $C(n, r)$ .
- (c)  $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$  coeficientes binomiales
- (d)  $C(n, r) = C(n, n-r)$

### 3. Coeficientes binomiales

- (a) Sean x e y variables, y n un entero no negativo. Entonces,  $(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$
- (b)  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$
- (c)  $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0$
- (d) Identidad de Pascal:  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
- (e) Identidad de Vandermonde:  $\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$
- (f)  $\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$
- (g)  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

### 4. Probabilidades finitas

- (a) Un experimento es un procedimiento que entrega una de entre varias posibles salidas.
- (b) El conjunto de posibles salidas del experimento se llama espacio de muestra.
- (c) Sea S un espacio finito de muestras en que cada muestra es igual de posible que todas las otras, y sea E un evento, i.e.  $E \subseteq S$ . La probabilidad de E se define como  $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$
- (d)  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
- (e)  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

### 5. Teoría de probabilidades

- (a) Sea S un espacio finito de muestras. Una distribución de probabilidad es una función  $P : S \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\sum_{s \in S} P(s) = 1$ .
- (b) Además, definimos  $P(E) = \sum_{s \in E} P(s)$  para  $E \subseteq S$ .
- (c) Sean E y F eventos tales que  $P(F) > 0$ . La probabilidad condicional de E dado F, se define como  $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$
- (d) Decimos que los eventos E y F son independientes si  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

## 2 Ejercicios

1. Demuestre que

$$(a) \# \{f : \{1 \dots N\} \rightarrow \{1 \dots N\}, f \text{ inyectiva}\} = N!$$

$$(b) \# \{f : \{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots N\}, f \text{ inyectiva}\} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

$$(c) \# \{A \subseteq \{1 \dots N\}, |A| = n\} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

2. Demuestre de forma combinatorial que 
$$\binom{N}{n} = \binom{N-1}{n-1} + \binom{N-1}{n}$$

3. Si tengo  $n$  elementos distinguibles, y los quiero separar en  $r$  grupos de cantidades  $n_1, \dots, n_r$ , de forma que  $\sum_{i=1}^r n_i = r$ , la cantidad es 
$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^r n_i!}$$

4. Si tengo  $n$  bolas y  $r$  urnas, la forma de poner las bolas en las urnas es 
$$\binom{n+r-1}{n}$$

5. En el ejemplo anterior, si agrego la condición de que ninguna urna esté vacía, la cantidad es 
$$\binom{n-1}{n-r}$$

6. Si un edificio tiene  $n$  personas y  $m$  pisos, y cada persona se baja en un piso con igual probabilidad

$$\Pr(\text{En el } k - \text{ésimo piso se bajan } n_k \text{ personas, } \forall k = 1 \dots m) = \frac{n!}{m^n \prod_{i=1}^m n_i!}$$

7. En un grupo hay  $n$  personas, y se quiere elegir un comité de  $j$  personas. Luego, se quiere escojer un subcomité de  $i$  personas, con  $i \leq j$ . Entonces

$$\binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i}$$