

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter
Fecha: 02 de Abril

Auxiliar 4: Inducción y Recursión

1. Materia

1. Principio de inducción fuerte:

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, \dots, n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

entonces $A \subseteq \mathbb{N}$. Equivalentemente, sea P una propiedad cualquiera sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, P(k) \text{ es verdadero} \Rightarrow P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces P es verdadero para todos elementos de $\mathbb{N}$.

2. Principio del buen orden:

Todo conjunto no vacío de números naturales positivos tiene un menor elemento.

Nótese que el principio de inducción fuerte es equivalente al principio de inducción simple, y también es equivalente al principio del buen orden. Podemos también enunciar el principio de inducción fuerte para un conjunto arbitrario A y un orden $\preceq$, siempre que $\preceq$ sea un buen orden para A .

2. Ejercicios

1. Demuestre que si se tiene un conjunto de n rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes (tres que se intersectan en el mismo punto), entonces ellas dan lugar a $(n^2 + n + 2)/2$ regiones.
2. Demuestre que el número $\sqrt{2}$ es irracional usando el principio del buen orden.
3. Demuestre que para todo $i, j \geq 1$, cualquier tablero de dimensiones $2i \times 3j$ se puede cubrir con piezas en forma de L.
4. Considere la siguiente versión de la función de Ackerman:

$$A(m, n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 0 \\ 2 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestre que $A(m, k) > A(m, l)$, para todo $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$.

5. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por las condiciones

$$\begin{aligned}f(0, y) &= y + 1 \\f(x + 1, 0) &= f(x, 1) \\f(x + 1, y + 1) &= f(x, f(x + 1, y))\end{aligned}$$

Demuestre que f está definida para todos los pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ayuda: Primero, enuncie y demuestre una variante del principio de inducción para el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden definido por $(x, y) \preceq (x', y') \leftrightarrow (x \leq x') \vee ((x = x') \wedge (y \leq y'))$.