

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter
Fecha: 02 de Abril

Auxiliar 9: Tópicos Avanzados de Grafos, Árboles.

1. Materia

1. Sea G un grafo. Un *circuito euleriano* de G es un circuito simple que pasa por todos los arcos de G . Si un grafo G tiene un circuito euleriano, decimos que G es euleriano.
Teorema: Sea G un multigrafo conexo. G es euleriano si y solo si todos los vértices de G tienen grado par.
2. Sea G un grafo. Un *camino euleriano* de G es un camino simple que pasa por todos los arcos de G .
Teorema: Sea G un multigrafo conexo. G tiene un camino euleriano pero no un circuito euleriano si y solo si exactamente dos vértices de G tienen grado impar.
3. Sea G un grafo. Un *circuito hamiltoniano* de G es un circuito simple que pasa por todos los nodos de G exactamente una vez. Si un grafo G tiene un circuito hamiltoniano, decimos que G es hamiltoniano.
4. Sea G un grafo. Un *camino hamiltoniano* de G es un camino simple que pasa por todos los nodos de G exactamente una vez.

2. Ejercicios

1. Sea G un grafo simple y euleriano. Demuestre o refute:
 - a) Si G tiene una cantidad par de vértices, entonces tiene una cantidad par de aristas.
 - b) Si G es bipartito, entonces tiene una cantidad par de aristas
 - c) Sea v un vértice de G . Entonces, $G - v$ (el grafo que resulta al remover v y todas sus aristas incidentes) es conexo.
 - d) Sea v un vértice de G . Entonces, $G - v$ (el grafo que resulta al remover v y todas sus aristas incidentes) no es euleriano.
 - e) Sean e y f dos aristas distintas de G que comparten un vértice en común, entonces G tiene un ciclo Euleriano en que e y f aparecen como aristas consecutivas.
 - f) $\bar{G}$ también es euleriano.
2. Encuentre grafos simples G tales que:
 - a) G es Euleriano pero G no es Hamiltoniano
 - b) G_1 no es Euleriano pero si Hamiltoniano
 - c) G es Euleriano y Hamiltoniano

3. Supongamos que se tiene un tablero de ajedrez de $n \times n$ ¿Existe algún valor de n para el cuál el caballo pueda moverse desde un casillero, hacer todas las movidas que son posibles para él en el tablero una vez cada una y volver al casillero inicial?
4. Supongamos que se tiene un tablero de ajedrez de $n \times n$ ¿Existe algún valor de n para el cuál el caballo pueda moverse desde un casillero y pasar por todos los otros casilleros exactamente una vez?
5. Un hipercubo n -dimensional, que llamaremos H_n , es un grafo simple en el que sus vértices han sido numerados en binario desde el 0 al $2^n - 1$, o sea cada vértice tiene un nombre compuesto por n bits. Una arista conecta a un par de vértices del hipercubo si estos difieren exactamente en un bit. Muestre que todo hipercubo siempre tiene un camino hamiltoniano.

3. Más materia

1. Un árbol es un grafo simple y conexo que no tiene circuitos simples.
2. Un bosque es un grafo simple sin circuitos simples.
3. Sea G un grafo simple con n vértices. Los siguientes son equivalentes:
 - G es conexo y no tiene circuitos simples (G es un árbol).
 - Si G es conexo y tiene $n - 1$ aristas.
 - Para todo vértice u, v de G , existe un único camino simple de u a v .

4. Más Ejercicios

1.
 - a) ¿Cuál es la diferencia entre un bosque y un árbol? Concluya que un bosque se puede ver como un conjunto de árboles.
 - b) Si F es un bosque con n vértices y está compuesto por m árboles independientes ¿Cuántas aristas en total tiene F ?
 - c) ¿Cuál es el mínimo número de aristas que puede tener un bosque de n vértices?
 - d) ¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener un bosque de n vértices?
2. Demuestre que si G es un árbol, cada vértice de G que no es hoja es un vértice de corte.
3. Demuestre que si G es un grafo simple con n vértices, $n - 1$ aristas y no tiene ciclos, entonces es un árbol.
4. Sea T un árbol y v una hoja de T , entonces el grafo $T - v$ es también un árbol.
5. Sea T un árbol. ¿Pueden todos los vértices de T tener grado mayor o igual a 2?
6. Sea T un árbol con al menos 3 vértices, y sean u y v dos vértices no vecinos en T . Demuestre que el grafo $T + uv$, o sea el grafo resultante de agregar una nueva arista $e = uv$ a T , no es un árbol.