



Profesor: Pablo Barceló
 Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter
 Fecha: 01 de Abril

Auxiliar 8: Repaso de Gráfos

1 Materia

- Grafos: Un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto no vacío de vértices V y un conjunto $E \subset V \times V$ de arcos.
- Grafos Simples:
 - Cada arco conecta un par distinto de nodos
 - No existen dos arcos para un mismo par de nodos
 - $(v, v) \notin E$, para todo $v \in V$
 - $(u, v) \in E \implies (v, u) \in E$
- Un multigrafo $G = (V, E)$ es un grafo simple, pero $E \subset V \times V \times \mathbb{N}$. La interpretación que se le da al hecho que $(u, v, n) \in E$ es que existen n arcos entre u y v .
- Un pseudografo es un multigrafo que viola la condición de que $(v, v) \notin E$, para todo $v \in V$ (i.e. el grafo tiene loops)
- Un grafo dirigido simple es un grafo simple que no satisface la condición de simetría: $(u, v) \in E \implies (v, u) \in E$
- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.
 - Los nodos $u, v \in V$ son adyacentes si existe un arco $e \in E$ tal que $e = (u, v)$.
 - Un arco $e \in E$ es incidente a $u \in V$ si conecta a u con algún $v \in V$.
 - El grado de un nodo $v \in V$ (denotado por $\deg(v)$) es el número de ejes que son incidentes a u , excepto por los loops en v que contribuyen dos veces al grado de v .
 - Un nodo $v \in V$ está aislado si $\deg(v) = 0$, y está pendiendo si $\deg(v) = 1$.
- Teorema de los saludos
 - Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Entonces: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$
 - Corolario: Todo grafo no dirigido tiene un número par de nodos de grado impar.
- Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.
 - Decimos que u es adyacente a v si existe arco $e = (u, v)$ en E . Equivalentemente, decimos que v es adyacente desde u . Además, u es el nodo inicial de e , y v es el terminal.
 - El grado de entrada de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo terminal a v . Lo denotamos por $\deg^-(v)$.
 - Similarmente, el grado de salida de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo inicial a v . Lo denotamos por $\deg^+(v)$.
 - Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$
- Un clique de n vértices v_1, v_2, \dots, v_n , denotado por K_n , es el grafo que contiene un arco por cada par de nodos $v_i, v_j, 1 \leq i, j \leq n$ y $i \neq j$.
- Un ciclo de n vértices v_1, v_2, \dots, v_n , denotado por C_n , tiene como arcos a los pares: $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)\}$
- La rueda W_n se obtiene desde C_n agregando un nuevo vértice y uniendo mediante arcos este nuevo vértice a cada uno de los n vértices de C_n .

12. Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito, si V puede ser particionado en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arco del grafo conecta un nodo de V_1 con uno de V_2 .
13. Teorema
Un grafo simple es bipartito si y solo si es posible asignar uno de dos colores diferentes a cada vértice del grafo, de tal forma que ningún par u, v de vértices adyacentes recibe el mismo color.
14. El grafo bipartito es completo si existe un arco entre cada par de nodos (u, v) tal que $u \in V_1$ y $v \in V_2$.
15. Un subgrafo de $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Decimos que el subgrafo es propio si $G \neq G'$.
16. La secuencia de grados de un grafo simple G es la secuencia de los grados de sus nodos en orden no creciente.
17. Representación de grafos: Hay diversas formas de representar los grafos, y la más conveniente depende de la aplicación que tengamos en mente.
- Una de las formas es listar los nodos que son adyacentes a cada nodo. Esto se denomina la lista de adyacencia del grafo.
 - Otra forma es representar la adyacencia por medio de una matriz, denominada la matriz de adyacencia $\in M_{V \times V}(\mathbb{N})$
 - Matriz de incidencia $\in M_{V \times E}(\{0, 1\})$
18. Isomorfismo: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos simples. Decimos que son isomorfos si existe una biyección $f: V \rightarrow V'$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $$(v_1, v_2) \in E \iff (f(v_1), f(v_2)) \in E'$$
- La función f es un isomorfismo entre G y G' .
19. Invariantes son propiedades P que son preservadas por los isomorfismos, e.g. número de vértices, número de arcos, grados, etc.
20. El complemento de un grafo simple $G = (V, E)$ es el grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$, tal que $(v_1, v_2) \in \bar{E} \iff (v_1, v_2) \notin E$.
21. Un grafo simple es complementario si G es isomorfo a \bar{G} .