Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Otoño 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter
Fecha: 24 de Marzo

Auxiliar 2: Relaciones

1 Materia

1. Demostraciones

   (a) Una demostración directa de $p \rightarrow q$ se construye de la siguiente forma:

      i. Asuma que p es verdadero.
      ii. Deduzca otras proposiciones a partir de p utilizando las reglas de inferencias y los axiomas.
      iii. Deténgase una vez que haya obtenido la proposición q.

   (b) Las demostraciones por contraposición están basadas en que para demostrar p→q basta demostrar ˜q→ ˜p

   (c) Una demostración por contradicción es:

      i. Asuma que queremos demostrar p.
      ii. encontrar una contradicción q tal que $\tilde{}p \rightarrow q$ es cierto
      iii. concluir que p es cierto

   (d) Bicondicionales

      i. Para demostrar un teorema de la forma $p \leftrightarrow q$, basta
      ii. Demostrar $p \rightarrow q$
      iii. Demostrar $q \rightarrow p$

   (e) Demostraciones por casos

      i. Queremos demostrar $p \rightarrow q$
      ii. Sabemos que p↔ $(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n)$
      iii. Basta demostrar que $(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \rightarrow q$
      iv. Basta demostrar que $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge ... \wedge (p_n \rightarrow q)$

   (f) Demostraciones de existencia

      i. Deseamos demostrar que $\exists x P(x)$
      ii. Existen demostraciones constructivas de existencia. Lo que hacen es encontrar un elemento a tal que P(a).
      iii. Existen también demostraciones no-constructivas de existencia. Asuma que no existe elemento a tal que P(a) y obtenga una contradicción.

   (g) Demostraciones de unicidad

      i. Deseamos demostrar que $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y))$
      ii. Tales resultados se prueban en dos partes
      iii. Existencia: hay un elemento a tal que P(a).
      iv. Univocidad: si b≠a, entonces ˜P(b).

2. Relaciones

   (a) Sean A y B conjuntos. Una relación entre A y B es un subconjunto de A×B, ie, R⊆A×B

   (b) Si A es un conjunto, entonces una relación en A es una relación entre A y A, ie, R⊆A×A

   (c) La cantidad de relaciones en un conjunto con n elementos es igual a la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n^2 elementos, ie, 2^{n^2}

3. Propiedades de las relaciones

   Una relación R en un conjunto A es:

   (a) Refleja: $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$

(b) Simétrica: si $(a,b) \in R,$ entonces $(b,a) \in R$

(c) Antisimétrica: si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$, entonces $a = b$

(d) Transitiva: si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$

4. Operaciones en relaciones

(a) Unión: $R \cup R' = \{(a,b) | (a,b) \in R \vee (a,b) \in R'\}$

(b) Intersección: $R \cap R' = \{(a,b) | (a,b) \in R \wedge (a,b) \in R'\}$

(c) Diferencia: $R - R' = \{(a,b) | (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin R'\}$

(d) Composición: $R \circ R' = \{(a,c) | (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R'\}$

(e) Si R relación en A, definimos $R^{n+1} = R^n \circ R$, donde $R^1 = R,\ n \geq 1$

5. Clausulas

La clausula transitiva R^* de R es la menor relación R' que contiene a R y tal que R' es transitiva. De forma análoga, se definen la clausula refleja y simétrica.

2 Ejercicios

1. La relación R en A es transitiva si y solo si $R^n \subseteq R$, para cualquier $n \geq 1$
2. R es simétrica si y solo si $R = R^{-1}$
3. Si R es simétrica, entonces R^n es simétrica para todo $n \geq 1$
4. Si A tiene n elementos, entonces $R^* = \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i$