Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Otoño 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter
Fecha: 02 de Abril

Auxiliar 7: Grafos, caminos y conectividad

1. Materia

1. Grafos: Un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto no vacío de vértices V y un conjunto $E : V \times V$ de aristas.

2. Grafos Simples:

   a) Cada arco conecta un par distinto de nodos

   b) No existen dos arcos para un mismo par de nodos

3. El *grado* de un nodo v es el número de aristas *incidentes en* v (aristas que conectan v con otro nodo).
   Los loops en v se cuentan doble.
   Para denotar el grado de v usaremos la expresión $deg(v)$.

4. Teorema: La suma de los grados de los vértices de un grafo simple G es igual a dos veces la cantidad de aristas de G.
   Corolario: Todo grafo simple tiene una cantidad par de vértices de grado impar.

5. Camino: Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un *camino* entre dos nodos $u, v \in V$ es una secuencia de aristas $e_1 \cdots e_n$ tal que existen nodos $x_0, \ldots, x_n$ que satisfacen:

   - $x_0 = u$ y $x_n = v$
   - $e_i = (x_{i-1}, x_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$

   El *largo* del camino es n, la cantidad de aristas.

6. Caminos simples, circuitos: Un camino que parte en u y termina en u es un *circuito*. Los caminos/circtuitos que no repiten aristas se denominan caminos o circuitos *simples*.

7. Grafos conexos: Un grafo no dirigido es *conexo* si existe un camino entre cada par de nodos distintos del grafo.
   Una *componente conexa* de un grafo G es un subgrafo $G' \subseteq G$ que es conexo y maximal con respecto a $\subseteq$.

   - Todo grafo G no dirigido que no es conexo es la unión de un conjunto de componentes conexas de G.

8. Aristas y vértices de corte:
   Decimos que una arista e de un grafo G es una *arista de corte* si el subgrafo G' de G que resulta al remover e de G tiene más componentes conexas que G.
   Definimos un *vértice de corte* de la misma manera.

2. Ejercicios

1. Muestre que no es posible realizar un torneo de fútbol con 25 equipos, en donde cada equipo juegue 5 partidos, cada uno contra un equipo distinto.

2. En el departamento de informática de una empresa trabajan 15 empleados, uno de ellos es la secretaria del departamento y otro es el jefe del departamento, ambos se saludan todos los días y saludan a todos los demás empleados. Cada uno de los restantes empleados del departamento asegura que diariamente se saluda con exactamente 3 de sus compañeros (sin contar a la secretaria y el jefe) ¿Es esto posible?

3. Muestre que en un grafo simple con al menos dos vértices existen al menos dos vértices que tienen el mismo grado.

4. Suponga que v es un nodo de una arista de corte. Demuestre que v es un vértice de corte si y sólo si $deg(v) > 1$.

5. Muestre que un vértice c en un grafo simple y conexo G es un vértice de corte si y sólo si existen dos vértices u, v, ambos distintos de c, y tal que todo camino de u a v pasa por c.

6. Muestre que en todo grafo simple con al menos dos vértices hay al menos dos vértices que no son vértices de corte.

7. Muestre que un arista en un grafo simple G es de corte si y sólo si esa arista no es parte de ningún circuito simple en G.

3. Más materia

1. Grafos dirigidos y caminos: Misma definición, tomamos en cuenta la dirección. El *grafo no dirigido subyacente* a un grafo dirigido $G = (V, E)$ es el grafo no dirigido que resulta al computar la clausura simétrica de E.

2. Grafos dirigidos conexos:

   - Un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si para todo par de vértices v, v' existe un camino de v a v', y un camino de v' a v.
   - Un grafo dirigido es ẹ́bilmente conexo si para todo par de vértices v, v' existe un camino desde v a v' en el grafo no dirigido subyacente.

4. Más Ejercicios

1. Una *orientación* de un grafo no dirigido es una asignación de direcciones a las aristas del grafo tal que el grafo dirigido resultante es fuertemente conexo. Un grafo G es *orientable* si existe una orientación para G.
   Muestre que todo grafo simple, no dirigido no es orientable si G tiene aristas de corte.