Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Otoño 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Juan Reutter
Fecha: 01 de Abril

Auxiliar 3: Ordenes, Funciones y Notación Asintótica

1 Materia

1. Relaciones de equivalencia
   (a) Una relación R en A es de equivalencia si es refleja, simétrica, y transitiva.
   (b) Dado $p \geq 2$, la relación de congruencia $\equiv_p$de congruencia módulo p es una relación de equivalencia.
   $a \equiv_p b \Leftrightarrow p$ divide $b - a$
   (c) Para $a \in A$ denotamos por $[a]_R$ la clase de equivalencia de a con respecto a la relación de equivalencia R. Esta se define como $[a]_R = \{b|(a,b) \in R\}$
   (d) $[a]_R = [b]_R$ si y solo si $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$
   (e) $\bigcup\limits_{a \in R} [a]_R = A$

2. Ordenes parciales
   (a) Una relación R en A es un orden parcial si es refleja, antisimétrica, y transitiva. Comúnmente denotamos los ordenes parciales como (A,$\preceq$)
   (b) Las siguientes relaciones son ordenes parciales:
      i. $(\mathbb{N}, \leq)$
      ii. $(\mathbb{N}\backslash\{0\},|)$ (divisibilidad)
      iii. $(2^A, \subseteq)$, donde A es cualquier conjunto
   (c) Se dice que un orden parcial (A,$\preceq$) es total si para cada a,b$\in$A se tiene que a$\preceq$b o b$\preceq$a.
   (d) Sea (A,$\preceq$) un orden total. Decimos que $\preceq$ es un buen orden en A, si cada A'$\subseteq$A tiene un menor elemento con respecto a $\preceq$.

3. Inducción

   Teorema (Inducción bien ordenada)

   Sea A un conjunto que tiene un buen orden $\preceq$. Entonces la propiedad P es cierta para todo elemento a $\in$A, si:

   Inducción: Para todo b$\in$A, si P es cierto para todo a$\in$A tal que a$\preceq$b pero a$\neq$b, entonces P es cierto en b.

4. Funciones
   (a) Una función entre A y B es una relación R entre A y B, tal que:
      i. Para todo a$\in$A existe b$\in$B tal que (a, b)$\in$R
      ii. para todo a$\in$ A, si (a, b)$\in$R y (a, b')$\in$ R, entonces b=b'
   (b) Notación
      i. Escribimos $f : A \rightarrow B$ para denotar a una función, y f (a) = b para denotar que el par (a, b) está en la relación que representa a la función.
      ii. El dominio de f es A, y su codominio es B.
      iii. Si f (a) = b decimos que b es la imagen de a, y a la preimagen de b.
      iv. El rango de f es el conjunto {b$\in$B | f (a) = b, para algún a$\in$A}.
   (c) Una función $f : A \rightarrow B$ es
      i. Uno-a-uno o inyectiva: si para todo a, b$\in$A, a$\neq$b$\Longrightarrow$f(a)$\neq$f(b)
      ii. Sobre o sobreyectiva: si para todo b$\in$B existe a$\in$A tal que f(a) = b
      iii. Biyectiva: si es uno-a-uno y sobre.

(d) Sea $f : A \rightarrow B$una función biyectiva. Entonces la función inversa f^{-1}: B→A se define como f^{-1}(b)=a⇔f(a)=b.

(e) Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ La composición de g y f , denotada por g∘f , es una función de A en C tal que g∘f(a)=g(f(a))

5. Funciones Importantes

   (a) La función techo asigna a cada número real x el valor $\lceil x \rceil$ del menor entero y tal que x≤y.

   (b) La función piso asigna a cada número real x el valor $\lfloor x \rfloor$ del mayor entero y tal que x≥y.

   (c) La función factorial asigna a cada número natural n el producto n! de los primeros n enteros positivos (asumimos que 0! = 1).

6. Crecimiento de funciones

   (a) Sean f y g definidas desde $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Decimos que f es $O(g)$ si existen constantes c y k tal que

$$f(x) \leq cg(x), \text{ para todo x>k}$$

   (b) Teorema
   Si f_1 es $O(g_1)$ y f_2 es $O(g_2)$, entonces

      i. $f_1 + f_2$ es $O(max\{g_1, g_2\})$

      ii. $f_1 * f_2$ es $O(g_1 * g_2)$

   (c) Decimos que f es Ω(g) si y solo si g es O(f)

   (d) Decimos que f es Θ(g) (o f es de orden g), si y solo si f es O(g) y g es O(f).

   (e) Decimos que f es $o(g)$ si y solo si f no es $\Omega(g)$

   (f) Decimos que f es $\omega(g)$ si y solo si f no es $O(g)$

2 Ejercicios

1. Sea R una relación simétrica y transitiva, tal que para cada a∈A existe b∈A tal que (a,b)∈R. Demuestre que R es de equivalencia.

2. Demuestre que $(\mathbb{Z}, \leq)$ no es un buen orden

3. Demuestre que $(\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \preceq)$ es un buen orden, donde $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ ssi $a_1 < b_1$ o $(a_1 = b_1$ y $a_1 \leq b_1)$

4. Es cierto que si f y f∘g son uno-a-uno, entonces g es uno-a-uno. Lo mismo para funciones sobre.

5. Demuestre que para todo número real x y entero n

   (a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor$+ n.

   (b) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$

   (c) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

6. Demuestre que todo polinomio de grado n con coeficientes reales es $O(x^n)$.

7. Demuestre que no existe polinomio de grado n >1 que sea $O(x^{n-1})$

8. Utilize la notación O para estimar el tamaño de $\sum_{i=1}^{n} i$ y de $n!$

9. Encuentre una (buena) estimación del crecimiento de la función $(x + 1) \log (x^2 + 1) + 3x^2$.

10. Demuestre que $n \log n$ es $\Theta(\log n!)$.

11. Sea F es el espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demuestre que

    (a) Demuestre que (F, O) no es un orden parcial

    (b) Demuestre que (F, Θ) es de equivalencia.

    (c) Demuestre que (F_Θ, O) es un orden parcial, donde $F_\Theta = \{[f]_\Theta | f \in F\}$. Incluso, demuestre que (F_Θ, O) es un orden total. ¿Es (F_Θ, O) un buen orden? Considere $P = \{[x^\alpha]_\Theta | 0 < \alpha < 1\}$.