Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Examen - MA2A1
27 de Enero 2009

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

Pregunta 1 (b) Encuentre y dibuje los puntos en el plano (a, b) tales que la función:

$$f_{a,b}(x, y) = ay^2 + bx$$

restringida al circulo $x^2 + y^2 = 1$, tiene exactamente dos y cuatro puntos críticos respectivamente. Clasifique dichos puntos.

Solución:

Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$, entonces

$$f_{a,b}(x, y) = g_{a,b}(\theta) = a\sin^2\theta + b\cos\theta \Rightarrow g'_{a,b}(\theta) = 2a\sin\theta\cos\theta - b\sin\theta = \sin\theta(2a\cos\theta - b)$$

Valores de a, b	Puntos Críticos
$a = 0, b = 0$	$\theta \in [0, 2\pi)$
$a = 0, b \neq 0$	$\theta = 0, \pi$
$a \neq 0, b = 0$	$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
$a \neq 0, b \neq 0$:	
$\frac{b}{2a} \notin (-1, 1)$	$\theta = 0, \pi$
$\frac{b}{2a} \in (-1, 1)$	$\theta = 0, \pi, \arccos\left(\frac{b}{2a}\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)$

En resumen si $(a, b) \in S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0, \frac{v}{2u} \in (-1, 1)\}$ entonces la función tiene exactamente 4 puntos críticos que son $\theta = 0, \pi, \arccos\left(\frac{b}{2a}\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)$ y si $(a, b) \in S^c \backslash \{0\}$ entonces la función tiene exactamente 2 puntos críticos que son $\theta = 0, \pi$. (ver Figura 1).

Para clasificarlos calculamos:

$$g''_{a,b}(\theta) = \cos\theta(2a\cos\theta - b) - 2a\sin^2\theta = 2a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - b\cos\theta = 2a(2\cos^2\theta - 1) - b\cos\theta$$

$$g''_{a,b}(\theta = 0) = 2a - b \tag{1}$$

$$g''_{a,b}(\theta = \pi) = 2a + b \tag{2}$$

$$g''_{a,b}\left(\theta = \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right) = \frac{(b - 2a)(b + 2a)}{2a} \tag{3}$$

$$g''_{a,b}\left(\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right) = \frac{(b - 2a)(b + 2a)}{2a} \tag{4}$$

Luego dependiendo de los valores a de a y b podemos clasificar cada uno de los punto críticos

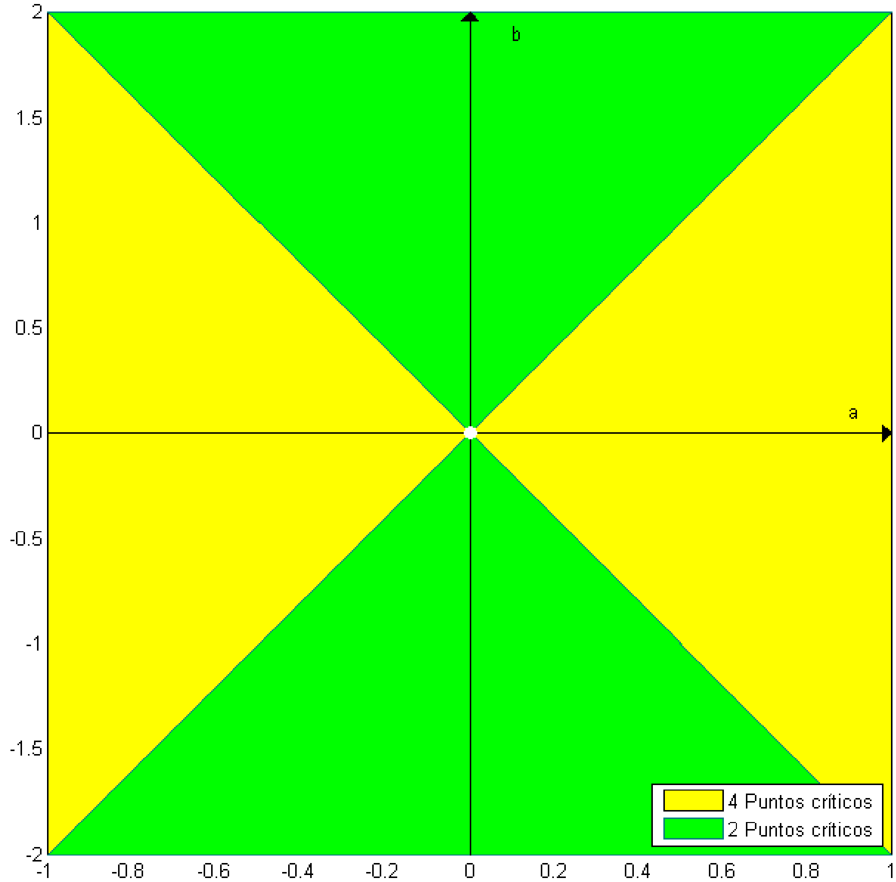

Figura 1: (a,b)-Espacio.