Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Examen - MA2A1
27 de Enero 2009

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

Pregunta 1 (c) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Se pide:

1. Calcular Δf
2. Determinar todas las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\Delta f = 0$, $F(0) = 0$ $F(1) = 1$

Solución:

1. Sea $t = \dfrac{y}{x}$ con $x \neq 0$ entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = -F'\frac{y}{x^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-F'\frac{y}{x^2}\right) = \left(-\frac{dF'}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{y}{x^2} + F'\frac{2y}{x^3} = F''\frac{y^2}{x^4} + F'\frac{2y}{x^3} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = F'\frac{1}{x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{dF'}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{1}{x} = F''\frac{1}{x^2} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Luego:

$$\Delta f = F''\frac{1}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x^2}\left[F''\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x}\right]$$

2. si $\Delta f = 0$ entonces

$$\frac{1}{x^2}\left[F''\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x}\right] = 0 \Rightarrow F''\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x} = 0$$

recordando que $t = \frac{y}{x}$ se tiene la siguiente E.D.O.:

$$(t^2 + 1)F''(t) + 2tF'(t) = 0 \text{ o bien escrita de otra forma } [(t^2 + 1)F'(t)]' = 0$$

luego $F'(t) = \dfrac{A}{t^2 + 1}$ con lo cual $F(t) = A\arctan(t) + B$

$$F(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{6}$$

$$F(1) = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{\pi} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

Finalmente

$$F(t) = \left(\frac{4}{\pi} + 2k\pi\right)\arctan(t) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$