**Universidad de Chile**
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**
**Departamento de Ingeniería Matemática**

**Cátedra - MA2A1**
**22 de Enero 2008**

# Teorema de Cambio de Variables para Integrales Dobles

### Cuál es la idea:

Bajo ciertas condiciones la integral múltiple en coordenadas cartesianas se transforma en una integral múltiple en otras coordenadas donde la región de integración es más simplificada y por lo tanto el cálculo es mucho más sencillo.

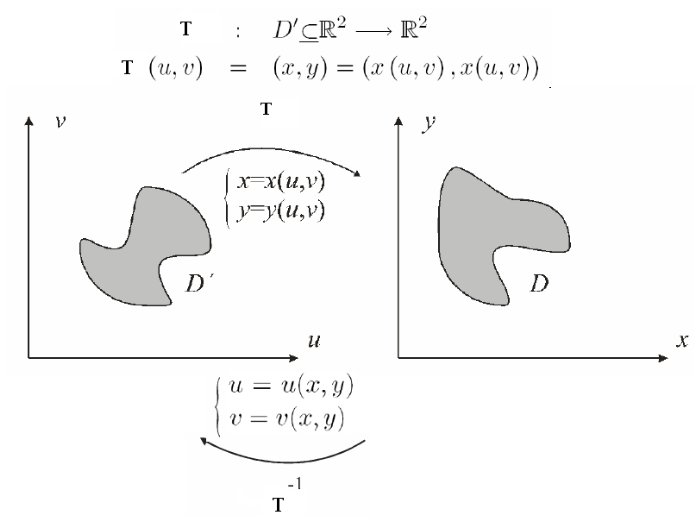



Figura 1: Interpretación geométrica de un cambio de variable.

$$\int_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|det(T'(u,v))|\,dudv \tag{1}$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv \tag{2}$$

$$\text{Donde } det(T'(u,v)) = J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Veamos dos ejemplos de cambios de variables:

1. Sea $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ el rectángulo $[0,1] \times [0,2\pi]$ y consideremos $T : (\rho,\theta) \longrightarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x,y)$. Es sabido que $T(D') = D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

2. Sea $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ el rectángulo $[-1,1] \times [-1,1]$ y consideremos $T : (u,v) \longrightarrow (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) = (x,y)$.
Veamos que $T(D') = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$

Veamos ahora la importancia del termino $|det(T'(u,v))|$ en la integral de (1).
Supongamos que $D'$ es una región de tipo I en las coordenadas $(u,v)$. Además supongamos que $D$ es un conjunto en el plano $XY$ de tipo I. Y la función $T$ como en la figura 1.
Será cierto que $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))dudv$?
Más aún, si consideramos $f(x,y)=1$, entonces se tendrá que $A(D)=\iint_D dxdy = \iint_{D'} dudv = A(D')$?
Veamos que en general esto nos es cierto, consideremos $T(u,v)=(2u,2v)=(x,y)$ y $D'=[0,1]\times[0,1]$.

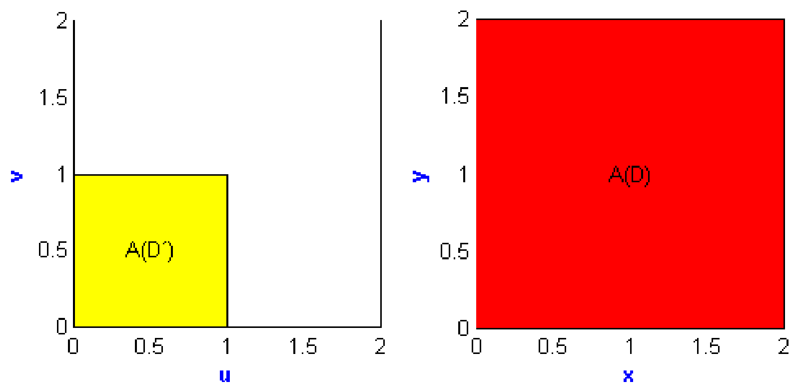



Figura 2: Contraejemplo.

Hay un factor que en ambos casos no está considerado y que garantiza la igualdad.
Se demuestra que ese factor es el valor absoluto del determinante de la transformación, es decir:

$$|det(T'(u,v))|$$

Ahora enunciaremos el teorema.

**Teorema del Cambio de Variables en la integral doble:**
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua de las variables $x$ e $y$ definidas en la región $D$.
Sea $T : D' \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase $C^1$. Supongamos que $T$ manda de manera inyectiva los puntos $(u,v)\in D'$ en los punto $(x,y)\in D$ y además supongamos que la matriz $T'(u,v)$ es invertible $\forall (u,v)\in D'$ o equivalentemente $det(T'(u,v))\neq 0\ \forall (u,v)\in D'$ .
Entonces

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(T(u,v))\,|det(T'(u,v))|\,dudv$$

El cambio de variables más común en integrales dobles es el cambio de variables a polares que se recomienda cuando el recinto de integración es alguna de las siguientes figuras pues al hacer el cambio se obtiene que el nuevo recinto de integración es un rectángulo: En general, el cambio biunívoco de coordenadas

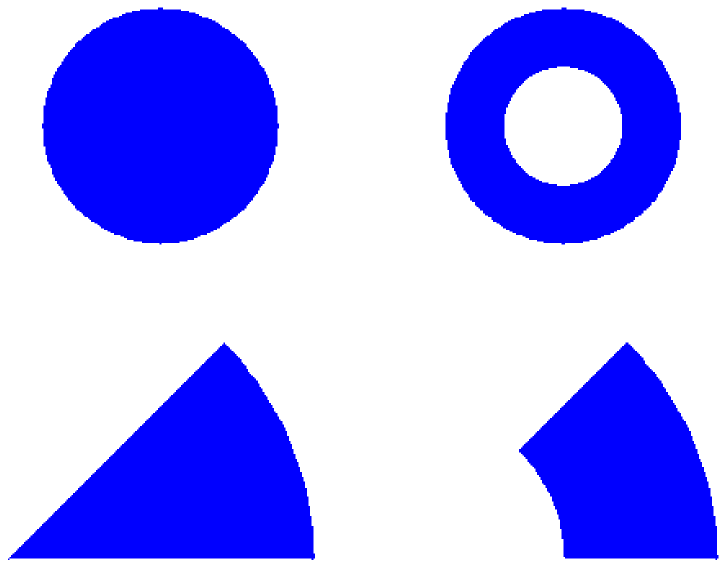


Figura 3: Zonas circulares

cartesianas $(x, y)$ a coordenadas polares $(\rho, \theta)$ se expresa como:

$$x = a + \rho \cos \theta$$
$$y = b + \rho \sin \theta$$

Donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0{,}2\pi)$ y el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es conocido.
El determinante del jacobiano es:

$$det(T'(\rho, \theta)) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

**Ejemplos:**

1. Considere $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Pruebe que

$$\iint_A (x^2 + y^2) dxdy = \frac{15\pi}{8}$$

2. Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcular

$$\iint_B (x^2 - y^2) dxdy$$

## APLICACIONES DE LA INTEGRAL DOBLE

1. Cálculo de áreas: Si $S \subseteq \mathbb{R}^2$, su área es

$$A(S) = \iint_S dxdy$$

2. Cálculo de masas y centro de gravedad: Si $S \subseteq \mathbb{R}^2$ representa a una superficie plana con densidad puntual $\delta(x,y) \geq 0$, para cada $(x,y) \in S$, entonces la masa de $S$ viene dada por:

$$m(S) = \iint_S \delta(x,y)dxdy$$

y el centro de gravedad de $S$, $(x_g, y_g)$, viene dado por:

$$x_g = \frac{1}{m(S)} \iint_S x\delta(x,y)dxdy \ \ , \ \ y_g = \frac{1}{m(S)} \iint_S y\delta(x,y)dxdy$$

3. Cálculo de volúmenes: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un recinto $xy-$proyectable definido por:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ y } f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$$

entonces el volumen vendrá dado por:

$$V(D) = \iint_S (g(x,y) - f(x,y))dxdy$$

La aplicación es análoga a recintos $xz-$proyectable e $yz-$proyectable

4. Área de superficies: Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un recinto $xy-$proyectable definido por:

$$\omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ y } z = f(x,y)\}$$

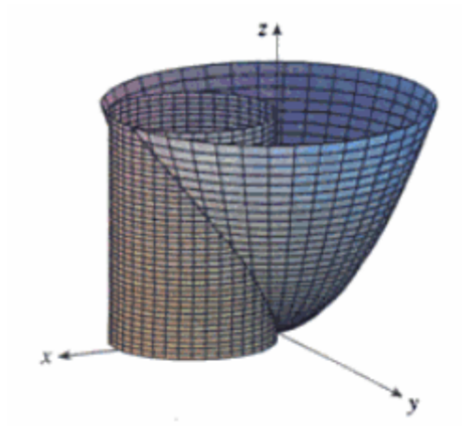
Entonces su superficie viene dada por:

$$A(\omega) = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

La aplicación es análoga a recintos $xz-$proyectable e $yz-$proyectable

**Ejemplos:**

1. Halle el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del plano $xy$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$




2. Halle el área del sector de círculo de radio r comprendido entre dos semirectas que pasas por el centro y forman un ángulo $\alpha$ entre sí. En particular, vea el caso $\alpha = 2\pi$

3. Calcular el área de la elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ con $a, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.

4. Calcular el volumen del sólido limitado por la elipsoide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.

5. Calcule el volumen encerrado por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$

6. Encuentre el volumen del sólido en el primer octante encerrado por $z = 4 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = x$, y $y = 2$.

7. Considere $D = [0, 1] \times [0, 1]$ con la densidad $\rho(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } y \leq x \end{cases}$ Calcule la masa de la placa, el centro de masa y el momento de inercia.

8. Calcule cambiando el orden de integración:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{1 - y} dydx$$