Taller 3 - MA2A1
17 de Enero 2009

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Christopher Hermosilla y Renzo Luttgés

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Se considera la ecuación de derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (*)$$

- a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\varphi(x, y) = (x + y, 2x + y) = (u, v)$
Sea $f(x, y) = g \circ \varphi(x, y)$ con $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
- b) Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en términos de las derivadas parciales de g
- c) Muestre que la ecuación (*) se transforma en $-\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ bajo el cambio de variable.
- d) Encuentre una expresión general para $f(x, y)$
2. Probar que la ecuación $yx^2 - xy^2 + z^2 \cos xz = 1$ define una función para $z = z(x, y)$ en una vecindad del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$.
Hallar el plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $(0, \sqrt{2})$
3. Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos para las siguientes funciones y determine si esta función tiene un mínimo global:
- a) $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$
b) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$
4. Determinar las ecuaciones del multiplicador de Lagrange para el punto del elipsoide de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + yz = 11$$

en el cual la función $f(x, y, z) = x + y - 2z$ se maximiza.
Determine dicho punto y el valor del multiplicador.

5. Calcule cambiando el orden de integración:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{1-y} dy dx$$

6. Encuentre el área de la región limitada por $x^2 + 2y^2 = 2$, $x^2 + 2y^2 = 4$, $y = \frac{x}{\sqrt{6}}$ y $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ en el primer cuadrante, con el siguiente cambio de variables $u = x^2 + 2y^2$ y $v = \frac{y}{x}$.

Recuerde: $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$