Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Tarea 4 - MA2A1

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Lüttges
Fecha: 11 de Enero de 2009

1. **Pregunta 1**
   Considere una carga puntual de magnitud q situada en el origen del plano cartesiano. Nos interesa calcular el potencial electrostático $V(x, y)$ alrededor de la carga. Para esto debemos resolver la ecuación de Poisson:

   $$\nabla^2 V(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

   Para resolverla, seguiremos los siguientes pasos:

   i Considere la función $\tilde{V}(r, \theta) = V \circ T(r, \theta)$, donde $T(r, \theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$ y su inversa es $T^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, arctg(y/x))$. Muestre que $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial r}$

   ii Suponga ahora que el potencial no depende del ángulo θ. Muestre la forma que toma la ecuación de Poisson en coordenadas polares bajo estas condiciones, y resuélvala con las técnicas conocidas. Finalmente exprese su resultado en coordenadas cartesianas.

2. **Pregunta 2**
   Considere la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = g(x, g(x, y)) * g(g(x, y), y)$, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

   Encuentre la aproximación de primer orden de F en torno a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   Observación: Se define la aproximación de primer orden de f en torno a (x_0, y_0) como:

   $$\Pi(x, y) = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) >$$

3. **Pregunta 3**
   Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es contínua en $x = 0$ pero no es derivable en ningún punto.
   A partir de ϕ, se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \phi(x) \cdot y$

   i Pruebe que existe alguna fución ϕ con la propiedad anyterior (dé un ejemplo).

   ii Calcule las derivadas parciales de f para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   iii ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?. Demuéstrelo.

4. **Pregunta 4**
   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Pruébese que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(x/y)$, $y \neq 0$ pasan por el origen de coordenadas.

5. **Pregunta 5**
   Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 arctan(y/x) - y^2 arctan(x/y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   i Calcule $f(x,0)$ y $f(0,y)$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

   ii Para $(x,y) \neq (0,0)$ determine $\nabla f(x,y)$ y $H_f(x,y)$. Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

   iii ¿ Es posible concluir que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Calcule y explique.

6. **Pregunta 6** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$. Se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

   i Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \phi(x,y) = (u,v) = (x+y, 2x+y)$ un cambio de variables. Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = f \circ \phi^{-1}(u,v)$ está bien definida.

   ii Usando que $f(x,y) = g \circ \phi(x,y)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   iii Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

   iv Muestre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

   v Sabiendo que el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que cumple:
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \forall (u,v) \in \mathbb{R}$ es:
   $\{g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; /; g(u,v) = \Psi_1(u) + \Psi_2(v)\}$ con $\Psi_1, \Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones clase C^2.
   Encuentre una expresión para la solución general de la ecuación presentada al principio, en términos de Ψ_1 y Ψ_2.

   vi Encuentre una solución particular cualquiera, que no sea la función nula ni un polinomio.

Fecha de Entrega: Viernes 16 de Enero de 2009