Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Control 2 - MA2A1

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Lüttges
Fecha: 11 de Enero de 2009

1. **Pregunta 1**

   (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ . & . \\ 0 & \text{si} xy = 0 \end{cases}$$

   Se pide:

   i Encontrar los puntos de discontinuidad de f

   ii Pruebe que el conjunto de todos dichos puntos es cerrado

   Solución

   i Primero veamos que si $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ el denominador de f nunca se anula y por lo tanto f es continua. En los puntos de la forma $(a,0)$, con $a \neq 0$, no existe el limite de f, ya que si calculamos el limite por el camino $x = a$, se tiene:
   $\lim\limits_{(a,y)\longrightarrow(a,0)} f(a,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{a^3 - y^3}{ay} = \pm\infty$
   Como f no tiene limite en $(a,0)$, no es continua en los puntos de esa forma. Analogamente se prueba que f no es continua en los puntos de la forma $(0,b), b \neq 0$.
   Ademas, la funcion tampoco es continua en $(0,0)$, ya que no posee limite en ese punto. En efecto, si tomamos limites a lo largo de la familia de parabolas $y = \lambda x^2$, con $\lambda \neq 0$, obtenemos:
   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),y=\lambda x^2} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + \lambda^3 x^3}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$
   El cual depende de la parabola tomada.
   Asi se tiene que la funcion es discontinua en las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

   ii Cada una de las rectas correspondientes a los ejes es cerrada en $\mathbb{R}^2$ por ser la preimagen de un cerrado a través de una función contínua. En efecto, sean $g_1(x,y) = x$ y $g_2(x,y) = y$, luego se tiene que la recta $x = 0$ es $g_1^{-1}(0)$ y la recta $y = 0$ es $g_2^{-1}(0)$.

(b) Sea $S=\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|=1\}$. Sea $g: S\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y tal que $g(1,0)=g(0,1)$ y $\forall x\in S\ g(-x)=-g(x)$. Se define:

$$f(x)=\begin{cases}\|x\|g\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Sea $a\in\mathbb{R}^2$, demuestre que si $h(t)=f(at)\ \forall t\in\mathbb{R}$ entonces h es diferenciable.

Solución

Notemos que como $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ entonces $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. luego para ver su diferenciabilidad bastará estudiar su derivada. Observemos primero que:

$$h(s)=\|sx\|g\left(\frac{sx}{\|sx\|}\right)=s\|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \text{ pues } g(-x)=-g(x) \text{ esto es } \forall s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\ \ (*)$$

Si $a=(0,0)$ entonces se tiene el resultado pues $h\equiv 0$. Si $a=(c,0)$ con $c\neq 0$ entonces:

$$\text{Sea } t\neq 0, \text{ luego } h(t)=t\cdot cg(0,1) \text{ y como } h(0)=0$$

Entonces

$$h(t)=kt \text{ con } k=cg(1,0)=\text{cte. real}$$

. Con esto h es claramente diferenciable en $\mathbb{R}$ pues es lineal. Además como $g(1,0)=g(0,1)$ el mismo resultado se tiene si $a=(0,c)$ con $c\neq 0$. Veamos ahora el caso general, con $a\neq(0,0)$. Si $t\neq 0$ por $(*)$ tenemos que

$$h(t)=kt \text{ con } k=\|a\|g\left(\frac{a}{\|a\|}\right)=\text{cte. real}$$

Luego h es diferenciable en $t\neq 0$. Para ver la diferenciabilidad en $t=0$ veamos si existe $h'(0)$.

$$\lim_{s\to 0}\frac{h(s+0)-h(0)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{h(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{s\|a\|g\left(\frac{a}{\|a\|}\right)}{s}=\lim_{s\to 0}\|a\|g\left(\frac{a}{\|a\|}\right)=\|a\|g\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$$

. Luego h es diferenciable en $\mathbb{R}$.

(c) Resuelva:

i Sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Determine a de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

ii Considere $H:[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$H(x,y)=\begin{cases}\tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(\frac{\pi}{4},1)\\ e^{-1} & \text{si} \quad (x,y)=(\frac{\pi}{4},1)\end{cases}$$

Demuestre que H es continua en todo su dominio.

Solución

i Pasando a coordenadas polares:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} f(rcos(\theta), rsen(\theta))$
$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{ln(r^2+1) + r^3(cos^3(\theta) + sen^3(\theta))}{r^2}$
$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{ln(r^2+1)}{r^2} + \lim\limits_{r\to 0} r(cos^3(\theta) + sen^3(\theta))$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ln(h+1)}{h} + 0 = 1$. Luego para $a = 1$, la fución es contínua.

ii Notar que para $(x,y) \neq (\pi/4, 1)$ se tiene que $H(x,y) = e^{\frac{ln(tan(xy))}{1-tan(xy)}}$. Luego H es la composición de las funciones $r(x) = e^x$, $s(x,y) = tan(xy)$ y $f(x) = \dfrac{ln(x)}{1-x}$, donde $r(x)$ y $s(x,y)$ son contínuas en $\mathbb{R}$ y $[0, \frac{\pi}{4}] \times [0,1]$ respectivamente por ser álgebra y composición de funciones contínuas. Además veamos que $s([0, \frac{\pi}{4}] \times [0,1]) = [0,1]$. Luego resta ver qué sucede con $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
Primero es claro que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x)}{1-x} = -\infty$, pero sin embargo H es continua pues $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ (existe).
El otro límite lo calculamos usando la regla de l'hopital:
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln(x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, luego $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},0)} H(x,y) = e^{-1}$ y H es continua.

2. **Pregunta 2**

(a) Considere una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y que cumple la siguiente relación

$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha\sqrt{x^2+y^2}$. Con $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante.

Sea $g(\rho, \theta) = f(\rho cos(\theta), \rho sin(\theta))$. Se pide

i Encontrar la Ecuación diferencial que cumple $g(\rho, \theta)$ en funcion de las variables ρ y θ

ii Encontrar una solución de dicha ecuación que no sea ni la función nula ni un polinomio

Solución

i Recordando que $f(x,y) = g(\rho, \theta)$, se tiene:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$
Usando las ecuaciones $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = arctan(\frac{y}{x})$ obtenemos:
$\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = cos(\theta)$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial y} = sen(\theta)$
$\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-sen(\theta)}{\rho}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{cos(\theta)}{\rho}$
Luego reemplazando:
$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \rho cos(\theta) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \rho} cos(\theta) - \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{sen(\theta)}{\rho} \right) + \rho sen(\theta) \left(\frac{\partial g}{\partial \rho} sen(\theta) + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{cos(\theta)}{\rho} \right) = \alpha \rho$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \rho} = \alpha.$

Luego g debe ser una función de la forma $g(\rho, \theta) = \alpha\rho + f(\theta)$, donde f es una función de θ cualquiera.

ii Como caso particular de solución podemos entregar, por ejemplo $g(\rho, \theta) = \alpha\rho + tan(\theta)$

(b) Considere la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $F(x, y) = (g(x, g(x, y)), g(g(x, y), y))$, Donde $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable.

i Encuentre la matriz Jacobiana de F en (x_0, y_0) en términos de g y sus derivadas. Indique dónde se encuentran evaluadas éstas.

ii Verifique la identidad encontrada para $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$g(u, v) = u + v$

Solución

i Consideremos las transformaciones:

$L \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} g(u, v) \\ g(w, z) \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ g(x, y) \\ g(x, y) \\ y \end{pmatrix}$

Claramente $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, con lo cual $F = L \circ T$. Por regla de la cadena:

$J_F = J_L(T(x, y)) \cdot J_T(x, y)$, donde $J_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(x,y)}$ y $J_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x, g(x,y), g(x,y), y)}$

$\Rightarrow J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$

Las derivadas $\frac{\partial g}{\partial u}$ y $\frac{\partial g}{\partial v}$ están evaluadas en $(x, g(x, y))$, en tanto que las derivadas $\frac{\partial g}{\partial w}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$ están evaluadas en $(g(x, y), y)$.

ii $g(u, v) = u + v \Rightarrow F(x, y) = 2x + y, x + 2y) \Rightarrow J_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si se aplica la fórmula:

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial w}(g(x, y), y) = 1$, $\frac{\partial g}{\partial z}(g(x, y), y) = 1$ $\frac{\partial g}{\partial u}(x, g(x, y)) = 1$, $\frac{\partial g}{\partial v}(x, g(x, y)) = 1$.

$J_F = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$