Taller 2 - MA2A1
5 de Enero 2009

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Christopher Hermosilla y Renzo Luttgés

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $(0,0)$, pero las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^n}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) (2.0) Para qué valores de n , f es continua en todo $\mathbb{R}^2$
b) (2.0) Para qué valores de n , f admite derivadas parciales en todo $\mathbb{R}^2$
c) (2.0) Para qué valores de n , f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$
3. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Sea $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $g(1,0) = g(0,1)$ y $\forall x \in S$ $g(-x) = -g(x)$. Se define:

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sea $a \in \mathbb{R}^2$, demuestre que si $h(t) = f(at) \forall t \in \mathbb{R}$ entonces h es diferenciable.

4. Sean E, F dos e.v.n. Sea $f : E \rightarrow F$ una función positivamente homogénea, es decir,

$$\forall x \in E, \forall t > 0 \quad f(tx) = tf(x)$$

Pruebe que si f es diferenciable en 0 entonces f es lineal.

5. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n \wedge y \in \mathbb{R}^m\}$ provisto de la norma

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal, es decir, existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$B(x, y) = \langle L(x), y \rangle$$

- a) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$|B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$$

- b) Demuestre que $\forall (x, y), (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, se tiene:

$$B((x, y) + (h, k)) = B(x, y) + B(x, k) + B(h, y) + B(h, k)$$

- c) Demuestre que B es continua para cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

- d) Demuestre que B es diferenciable en cada punto $(x_0, y_0), (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con

$$DB(x_0, y_0)(h, k) = B(h, y_0) + B(x_0, k)$$

6. a) Suponga que para cada $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la función $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface:

$$z(t^3x, t^2y) = tz(x, y)$$

Pruebe que z satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$3x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + 2y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = z(x, y)$$

- b) Suponga $z = \cos(xy) + y \log x$. si $x = x(u, v) = 5u^2 + \sin(uv)$ y $y = y(u, v) = ve^u + 2v^2$. Utilizando la regla de la cadena, calcule una expresión para $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable

- a) Suponga que f satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Supongamos que $\exists u$ una función derivable tal que $x = u(y)$ y que satisface $\frac{\partial x}{\partial y} = f$.

Pruebe que $g(t) = f(u(y), y)$ es constante con respecto a y .

- b) Pruebe que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ si y sólo si $\exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(x, y) = g(x + y)$

- c) Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(u, v) = (uv, \frac{u^2 - v^2}{2})$.

Pruebe que F verifica la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = (u^2 + v^2) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)$$