Auxiliar 1 - MA2A1
Solución Problema Propuesto

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Victor Carmi y Cristopher Hermosilla

P. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^\alpha)}{xy} & \text{si} \quad x \neq 0, y \neq 0 \\ y & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

determine α para que f sea continua en $(0,0)$, para esto puede considerar la sucesión $(x_n, y_n) = (y_n^\beta, y_n)$ para algún $\beta > 0$

Solución (con sucesiones):

Notemos que $f(0,0) = 0$ pues si $x = 0$ entonces $f(x,y) = y = 0$.
Supongamos que (x,y) es tal $x = 0$ entonces $f(x,y) = y$ por definición de f, luego si tomamos una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tendremos que:

$$f(x_n, y_n) = y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

en otras palabras:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\, |f(x_n, y_n)| = |y_n| < \epsilon$$

Simétricamente, si suponemos que $y = 0$ llegaremos a una expresión similar a la anterior, ie:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall n > m_0)\, |f(x_n, y_n)| = |x_n| < \epsilon$$

Definamos $n_0^* = \max\{n_0, m_0\}$.
Ahora bien, si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ veamos que condiciones necesitamos sobre α para tener la continuidad en $(0,0)$.
La ideas del problema es encontrar $\Omega = \{\alpha \in \mathbb{R} : \text{f es continua en (0,0)}\}$. Supongamos que hemos encontrado $\Omega \neq \emptyset$, luego para cualquier sucesión que nos demos $(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ tendremos que $f(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(\forall\alpha \in \Omega)$ pues bajo estas condiciones f es continua en (0,0). En particular tomemos la sucesión que se indica en el enunciado, es decir sea $x_n = y_n^\beta$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ con $\beta > 0$. Luego:

$$|f(x_n, y_n)| = \left|\frac{\sin(x_n^2 y_n^\alpha)}{x_n y_n}\right| = \left|\frac{\sin((y_n^\beta)^2 y_n^\alpha)}{(y_n^\beta) y_n}\right| = \left|\frac{\sin(y_n^{2\beta+\alpha})}{y_n^{\beta+1}}\right| = \left|\frac{\sin(y_n^{2\beta+\alpha})}{y_n^{\beta+1}} \frac{y_n^{\beta+\alpha-1}}{y_n^{\beta+\alpha-1}}\right| = \left|\frac{\sin(y_n^{2\beta+\alpha})}{y_n^{2\beta+\alpha}} y_n^{\beta+\alpha-1}\right|$$

pero sabemos que $\frac{\sin(y_n^{2\beta+\alpha})}{y_n^{2\beta+\alpha}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ puesto que como $\beta > 0 \wedge y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow y_n^{2\beta+\alpha} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Luego podemos deducir que si $y_n^{\beta+\alpha-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Ahora, para que $y_n^{\beta+\alpha-1}$ converja, dado que y_n converge, necesitamos que $\beta + \alpha - 1 > 0$ y dado que $\beta > 0$ es arbitrario, tenemos para este caso particular que $\alpha - 1 \geq 0$, es decir $\alpha \geq 1$.
Luego $\Omega \subseteq \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 1\}$
Veamos que se tiene la continuidad con $\alpha \geq 1$ para el caso general.
Sea (x_n, y_n) una sucesión cualquiera que converge a cero, es decir $(\forall\epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n > n_1)\|(x_n, y_n)\| < \epsilon$.
Notar que también podemos ver la convergencia como $(\forall\epsilon > 0)(\exists m_1 \in \mathbb{N})(\forall n > m_1)\|(x_n, y_n)\| < \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}$.
Veamos que sucede en el caso en que $x_n, y_n \neq 0$.

$$|f(x_n, y_n)| = \left|\frac{\sin(x_n^2 y_n^\alpha)}{x_n y_n}\right| \leq \left|\frac{x_n^2 y_n^\alpha}{x_n y_n}\right| = \left|x_n y_n^{\alpha-1}\right|$$

- si $\alpha = 1$, entonces $|f(x_n, y_n)| \leq |x_n| \leq \|(x_n, y_n)\| < \epsilon$ $(\forall n > n_1)$
- si $\alpha > 1$, entonces $|f(x_n, y_n)| \leq |x_n| \left|y_n^{\alpha-1}\right| \leq \|(x_n, y_n)\| \|(x_n, y_n)\|^{\alpha-1} = \|(x_n, y_n)\|^{\alpha} < (\epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha} = \epsilon$ $(\forall n > m_1)$

fnalmente, juntando todo lo hecho y definiendo $n^* = \text{máx}\{{n_0}^*, n_1, m_1\}$, tendremos:

$$(\forall (x_n, y_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} (0,0))(\forall \epsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n > n^*) \text{ tal que } \|(f(x_n, y_n)\| < \epsilon$$

por lo tanto f es continua en (0,0) $\iff \alpha \geq 1$