Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Control 1 - MA2A1

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Lüttges

1. **Pregunta 1**

(a) Considere la siguiente sucesión de elementos de $E = C[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \leq 1/n \\ 0 & \text{si } x > 1/n \end{cases}$$

Se consideran en E las distancias:

$$d_1(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$
$$d_2(f,g) = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

i Determine el límite puntual de f_n y muestre que este no se encuentra en (E, d_1)

ii Pruebe que f_n tiene límite $f(x) = 0$ en (E, d_2)

Solución
i. Si fijamos x y $n \longrightarrow \infty$, se tiene que $f_n(x)$ tiende a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Esta función no se encuentra en (E, d_1) pues f no es continua. Luego, f_n no tiene límite en (E, d_1).

ii. Basta con ver que $d_2(f_n, f) = \left(\int_0^{1/n} (1 - nx)^2 dx\right)^{1/2}$

$$= \left(\int_0^{1/n} (1 - 2nx + n^2x^2)dx\right)^{1/2} = \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{3n}\right)^{1/2}$$

$= \frac{1}{\sqrt{3n}}$. Con lo cual $d_2(f_n, f) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$

(b) Sea (E, d) un espacio métrico. Muestre que $A \subseteq E$ es abierto si y sólo si $A - E$ es cerrado.

Solución
Si A es cerrado, sea $x \in A^c$. Como $A' \subseteq A$ y $x \notin A$, se tiene que $x \notin A^c$. Esto es, existe un $r > 0$ tal que $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \phi$. Con lo cual $(B(x, r_x) - \{x\}) \subseteq A^c$ y se tiene que A^c es abierto.

Recíprocamente, si A^c es abierto, sea $x \in A'$. Si $x \notin A$ existirá un $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq A^c$, es decir, $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \phi$, lo que nos lleva a una contradicción.

(c) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Diremos que $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ es producto interno sobre E si cumple:
p1) $< ax + by, z >= a < x, z > +b < y, z > \forall x, y, z \in E \ \forall a, b, \in \mathbb{C}$
p2) $< x, y >= \overline{< y, x >} \ \forall x, y \in E$
p3) $< x, y >\geq 0 \ \forall x \in E \wedge < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

i Pruebe que $< x, cy + dz >= \overline{c} < x, y > +\overline{d} < x, z > \forall x, y, z \in E \ \forall c, d \in \mathbb{C}$

ii Pruebe la identidad polar, es decir: $4 < x, y >= \sum_{k=1}^{4} i^k < x + i^k y, x + i^k y >$

Solución
i. Sean $c, d \in \mathbb{C}$, Sean $x, y, z \in E$, entonces:

$$\langle x, cy + dz \rangle = \overline{\langle cy + dz, x \rangle} = \overline{c \langle y, x \rangle + d \langle z, x \rangle} = \overline{c}\overline{\langle y, x \rangle} + \overline{d}\overline{\langle z, x \rangle} = \overline{c} \langle x, y \rangle + \overline{d} \langle x, z \rangle$$

ii. Sean $x, y \in E$, notemos que $\overline{i^k} = i^{-k}$ y además que $\sum_{k=1}^{4} i^k = i - 1 - i + 1 = 0$ y $\sum_{k=1}^{4} i^{2k} = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4} i^k \left\langle x + i^k y, x + i^k y \right\rangle &= \sum_{k=1}^{4} i^k \left(\langle x, x \rangle + i^{-k} \langle x, y \rangle + i^k \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \right) \\
&= \sum_{k=1}^{4} \left(i^k \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + i^{2k} \langle y, x \rangle + i^k \langle y, y \rangle \right) \\
&= \underbrace{\left(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \right) \sum_{k=1}^{4} i^k + \langle y, x \rangle \sum_{k=1}^{4} i^{2k}}_{=0} + \langle x, y \rangle \sum_{k=1}^{4} 1 \\
&= 4 \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

2. **Pregunta 2**

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2_+$ definida por $f(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{2xy}{x + y} \right)$.
Considere la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$ definida como:

$X_{n+1} = f(X_n) \ \forall n \geq 0$ y $X_0 = (x_0, y_0)$ con $x_0 > y_0 > 0$

i Muestre que la sucesión está bien definida.
ii Estudie la convergencia de la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
<u>indicación:</u> Se recomienda estudiar el crecimiento y cotas de x_n e y_n

iii Determine el límite de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
<u>indicación:</u> Se recomienda estudiar la sucesión $x_n \cdot y_n$.

Solución

i. Para que la sucesión no se indefina bastará con que el denominador de y_n sea no nulo. Esto es $y_n + x_n \neq 0$, lo cual se tiene, puesto que x_0 e y_0 son positivos y f va del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ en este mismo conjunto, con lo cual x_n e y_n son distintos de cero para todo n.

ii. Mostraremos que X_n es convergente mediante la convergencia de sus componentes x_n e y_n. Siguiendo las indicaciones, calculamos el producto de ambas sucesiones: $x_{n+1} \cdot y_{n+1} = \left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)\left(\frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}\right) = x_n \cdot y_n$. Aplicando esta relación recursivamente se tiene que $x_n \cdot y_n = x_0 \cdot y_0$.
Con esto podemos re-escribir las sucesiones como: $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_0 y_0}{2x_n}$ e $y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n}$.
Por otra parte puesto que la media armónica entre dos números positivos es siempre menor o igual a la media aritmética, se tiene que $y_n \leq x_n \ \forall n$, donde si sumamos x_n y dividimos por 2, se obtiene: $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq x_n$. Esto es, x_n es una sucesión decreciente. Este resultado conduce trivialmente a que $y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n}$ es creciente.
Para el acotamiento, veamos que $x_n \geq y_0$ por inducción sobre n:
Caso base: Del enunciado se tiene que $x_0 > y0$
Paso: Si $x_n \geq x_0$ entonces $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geq \frac{y_0 + y_n}{2} \geq \frac{y_0 + y_0}{2} = y_0$.
Con esta cota conocida para x_n podemos acotar $y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n} \leq \frac{x_0 y_0}{y0} = x_0$. Ahora tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in \mathbb{R} \text{ decreciente y acotada inferiormente} \\ y_n \in \mathbb{R} \text{ creciente y acotada superiormente} \end{array}\right\} \text{ambas convergen.}$$

iii. Sean L_x y L_y los límites de x_n e y_n respectivamente. Tomando límite a ambos lados de las igualdades se tiene:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \Rightarrow L_x = \frac{L_x + L_y}{2} \Rightarrow L_x = L_y = L$$
$$y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n} \Rightarrow L = \frac{x_0 y_0}{L} \Rightarrow L = \sqrt{x_0 y_0}$$

(b) Considere $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $N(x,y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x cos(t) + y sin(2t)|$.

i Muestre que N es una norma en $\mathbb{R}^2$

ii Sea B la bola unitaria para esta norma. Muestre que:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\} \subset B \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2\}$

iii Muestre que el 'borde' de B está constituido por 4 segmentos.

Solución

i. En efecto, N es una norma. Claramente es ≥ 0 pues se trata de un módulo. Veamos que es acotada, de la desigualdad triangular:
$|xcos(t) + ysin(2t)| \leq |xcos(t)| + |ysin(2t)| \leq |x| + |y|$, pues $|cos(t)| \leq 1$ y $|sin(t)| \leq 1 \ \forall t$

Claramente $N(\lambda x, \lambda y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\lambda xcos(t) + \lambda ysin(2t)| = |\lambda| \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |xcos(t) + ysin(2t)| = |\lambda| \cdot N(x,y)$

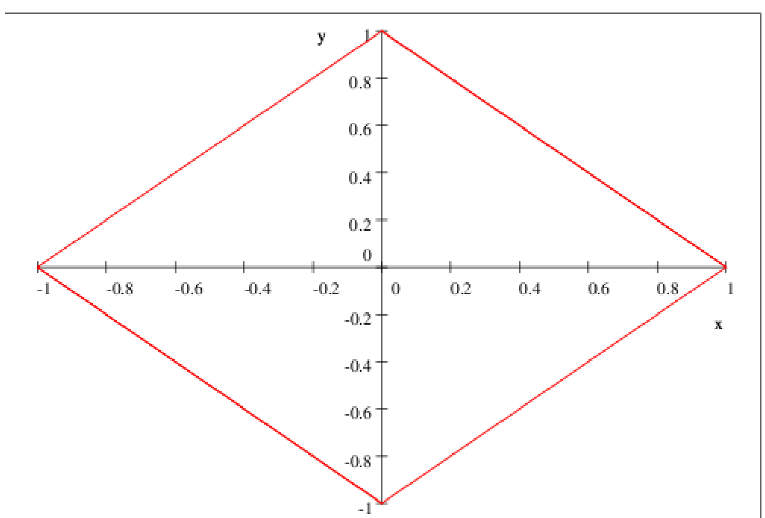
Por otro lado $N(x,y) = 0 \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |xcos(t) + ysin(2t)| = 0 \Rightarrow |xcos(t) + ysin(2t)| = 0 \ \forall t$
Evaluando en $t = 0$ se tiene que $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$. Con este dato y evaluando en $t = \pi/4$ obtenemos $|y| = 0 \Rightarrow y = 0$. La implicancia recíproca es trivial.
Finalmente, la desigualdad triangular:
$\forall t \quad |(x + x')cos(t) + (y + y')sin(2t)| \leq |(xcos(t) + ysin(2t)) + (x'cos(t) + y'sin(2t))| \leq |xcos(t) + ysin(2t)| + |x'cos(t) + y'sin(2t)| \leq N(x,y) + N(x',y')$
El real $N(x,y) + N(x',y')$ es independiente de t y acota superiormente a la función $t \longrightarrow |(x + x')cos(t) + (y + y')sin(2t)|$ para cualquier valor de t. Luego acota superiormente al supremo de esta función con respecto a t, y en consecuencia:

$$N(x + x', y + y') \leq N(x,y) + N(x',y')$$

ii. Para la primera inclusión, sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $|x| + |y| \leq 1$ De la primera desigualdad que se mostró en la parte anterior (dado que $|cos(t)| \leq 1$ y $|sin(2t)| \leq 1 \ \forall t$) se tiene: $N(x,y) \leq |x| + |y|$. Luego, $N(x,y) \leq 1$ y $(x,y) \in B$.
Para la segunda inclusión, sea $(x,y) \in B$ recordemos que
$\sup_{t\in\mathbb{R}} |xcos(t) + ysin(2t)| \leq 1 \Leftrightarrow |xcos(t) + ysin(2t)| \leq 1 \ \ \forall t$
Evaluando en $t = 0$, se tiene $|x| \leq 1$. Análogamente para $t = \pi/4$ se llega a $|y| \leq 1$. Luego:

$$\begin{matrix} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 \leq 1 \\ y^2 \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$$

iii. El análisis sobre los extremos de la función $t \longrightarrow xcos(t) + ysin(2t)$ para distintos rangos de x, entrega la relaciones entre x e y que cumplen $N(x,y) = 1$, resultando la bola:



(c) .

Claves del match de funciones:

$z_1 \to g_2 \to n_3$
$z_2 \to g_4 \to n_1$
$z_3 \to g_5 \to n_4$
$z_4 \to g_6 \to n_6$
$z_5 \to g_3 \to n_2$
$z_6 \to g_1 \to n_5$