Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Tarea 3 - MA2A1
ENTREGA: 31 de Diciembre 2008

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

1. Demuestre usando la definicion $\epsilon - \delta$ que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 1$ donde f está definida en $B((1,0),\frac{1}{2})$ por la fórmula:
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad y > 0 \\ \frac{1}{x+y} & \text{si} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el punto $(0,0)$:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \text{ e } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si} \quad y > 0 \text{ e } y < x^2 \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Determine a de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

4. Considere $H : [0,\frac{\pi}{4}] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$H(x,y) = \begin{cases} \tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (\frac{\pi}{4},1) \\ e^{-1} & \text{si} \quad (x,y) = (\frac{\pi}{4},1) \end{cases}$$
Demuestre que H es continua en todo su dominio.

5. Determine el valor de α para el cual la continuidad de la siguiente función es continua:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Considere F y G dos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ continuas con alguna norma (cualquiera) en $\mathbb{R}^n$ y el valor absoluto en $\mathbb{R}$. Pruebe que:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < G(x)\}$ es abierto.

   b) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq G(x)\}$ es cerrado.

   c) Para todo $C \subseteq \mathbb{R}$ cerrado se cumple que $F^{-1}(C)$ es cerrado.

   d) $\forall r, s \in \mathbb{R}$ se cumple que $C_{r,s} = \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq F(x) \leq s\}$ es cerrado.

7. Dado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ y dos puntos $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ demuestre que la función
$$\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b} \in \mathbb{R}^n$$
es continua. Concluya que el intervalo $[\vec{a},\vec{b}] = \{\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b} \in \mathbb{R}^n : \lambda \in [0,1]\}$ es compacto.

8. Sean $(X, \|.\|_x)$ e $(Y, \|.\|_y)$ dos espacios vectoriales normados y $\phi : X \to Y$ una función lineal. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) ϕ continua en 0

   b) $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in X$, $\|\phi(x)\|_y \leq M\|x\|_x$

   c) ϕ es continua

9. Sea $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ y considere $f : B \longrightarrow B$ una función continua. Supongamos que $\|f(x)\| < \|x\|$ $\forall x \in B \backslash \{0\}$. Sea $x_0 \in B$ y definamos la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por $x_{k+1} = f(x_k)$. Pruebe que $x_k \longrightarrow 0$.

10. Sea f una función continua definida en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}$. Si f verifica la propiedad que para todo $L \in \mathbb{R}_+$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{x}\| \geq k_0 \Rightarrow f(\vec{x}) \geq L$, demuestre que el conjunto

$$S_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) \leq \lambda\}$$

    es un compacto y que la función f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}^n$.

11. *a*) Sean M un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ y x_0 en $\mathbb{R}^n$. Probar que existe $m_0 \in M$ que materializa la distancia de x_0 a M, es decir,

$$\|x_0 - m_0\| = dist(x_0, M) := \text{ínf}\{\|x_0 - m\| : m \in M\}$$

    (Se dice que los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son proximales, por verificarse lo anterior)
    Hint: Justificar la existencia de una sucesion acotada $\{m_n\}$ en M tal que:

$$\|x_0 - m_n\| \longrightarrow dist(x_0, M) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

    b) Sea M un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe un vector x de la esfera unidad, tal que $dist(x, M) = 1$.
    Hint: Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$ y sea $m_0 \in M$ tal que $\|x_0 - m_0\| = dist(x_0, M)$.
    Considerar el vector normalizado de $x_0 - m_0$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definamos $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

    a) Pruebe que g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
    Hint: Considere g restringida al conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

    b) Pruebe que el límite:

$$\lim_{x\to 0} g(x) \text{ existe,}$$

    Si y sólo si f es constante en $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.