Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 2 - MA2A1
17 de Diciembre 2008

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

1. Demostrar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ no es convexo. (hacer un dibujo de este conjunto). Deducir de ello que:
$$\|(x,y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$$
No es una norma en $\mathbb{R}^2$. Qué condición falla??

   NOTA: *Si E es un espacio vectorial y $A \subseteq E$ se dice convexo si se cumple que $\forall x, y \in A$ $\forall \lambda \in [0,1]$ se tiene $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$*

2. Para $\alpha \in (0,1)$, definimos el espacio $\mathcal{C}^\alpha([0,1])$ de las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que son *Holder continuas de exponente* α, es decir cumplen:
$$|f|_\alpha = \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$
Pruebe que $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + |f|_\alpha$ es norma y que $\mathcal{C}^\alpha([0,1])$ es Banach con la norma anterior.

3. Considere el espacio de funciones $L_c^2([a,b],\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : \int_a^b f(x)^2 dx\}$.
Pruebe que
$$\forall f, g \in L_c^2([a,b],\mathbb{R}) \ , \ \langle f, g \rangle_2 = \int_a^b f(x)g(x)dx$$
define un producto interno en $L_c^2([a,b],\mathbb{R})$

4. Muestre que en $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$, se tiene que:
   a) $|\langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle| \leq \|b\|_2 \|a - c\|_2 + \|c\|_2 \|b - d\|_2$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$
   b) Probar que si $\|b - d\|_2 < \epsilon$ entonces $|\|b\|_2 - \|d\|_2| < \epsilon$

5. Sea (E, d) un e.m.,
   a) Sea $F \subseteq E$ un conjunto cerrado. Suponga que E es completo, pruebe que F también es completo.
   b) Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Si $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente a x^* entonces $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$