MA2A1-02 Cálculo en Varias Variables
Profesor Marcelo Leseigneur
Semestre Verano 2008

Tarea #1

Fecha de Entrega: 17 de Diciembre

1. Sea $E = R[X]$ el espacio de los polinomios reales. Se consideran las aplicaciones:

$N_\infty : E \to \mathbb{R}_+$ definida por $N_\infty(P) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant q} |a_i|$, donde $P = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i$

$\phi : E \to \mathbb{R}_+$ definida por $\phi(P) = P(1)$.

Se pide:

a) Demostrar que N_∞ es una norma sobre E.
b) Mostrar que ϕ es lineal
c) Se considera la familia de polinomios
$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calcular $N_\infty(P_n)$ y $\phi(P_n)$

2. Sea N un número natural y sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_N$ números reales distintos. En el espacio vectorial X de todas las funciones polinómicas de grado menor o igual que N definimos:

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{N} |f(\alpha_k)| \quad , (\ f \in X \ )$$

Probar que $\|\cdot\|$ es una norma en X.

3. En un espacio normado en vez de N2 basta exigir $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ¿Por qué?. Justifique.

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado real. Probar que
$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$, $\forall x_{1,} \cdots, x_n \in X$

5. Sea $d : E \times E \to R$ una función que verifica:

I. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
II. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$ (propiedad simétrica).
III. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in E$ (desigualdad triangular).

a) Demuestre que d no toma valores negativos.
b) Probar que: $|d(x,y)-d(y,z)| \leqslant d(x,z),\ \forall\, x,y,z \in E$
c) Por último, probar que: $d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n),\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in E$.

6. Definición: Sea (E,d) un espacio métrico. Dados $a \in E, r \geqslant 0$, la <u>bola abierta</u> (resp. cerrada) de centro a y radio r son los conjuntos dados por:

$$B(a,r) := \{ x \in E : d(x,a) < r \} \quad .$$
$$\bar{B}(a,r) := \{ x \in E : d(x,a) \leqslant r \} \quad .$$

La <u>esfera</u> de centro a y radio r es, por definición, el conjunto

$$S(a,r) := \{ x \in E : d(x,a) = r \}$$

Se pide:
a) Determine los tres conjuntos si la métrica es la discreta.
b) Si $E = \mathbb{R}^2, a = (0,0)$ y $r = 1$ Dibuje dichos conjuntos usando las distancias habituales de $\mathbb{R}^2$. Dibuje la bola cerrada para el caso $p = 10$.

Nota: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^p| \right)^{1/p} \quad (p \geqslant 1)$.

7. En el espacio $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ consideremos una función que depende de un parámetro:

$$f(t) = \frac{nt}{n+t} \quad .$$

Calcular $\|f\|_\infty$.

8. En el espacio métrico $(C_{[0,1]}, d_\infty)$ consideramos las siguientes funciones:

$$f(t) = t,\ g(t) = t^2,\ h(t) = t^3, \text{ y } q(t) = 0 \quad , \text{ para } \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Determinar las siguientes distancias: $d_\infty(f,g),\ d_\infty(g,h),$ y $d_\infty(h,q)$. Interprete gráficamente.

9. Se pide:
a) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz no singular P de $n \times n$ demuestre que la función $\|\vec{x}\|_P = \|P\vec{x}\|$ es también una norma en $\mathbb{R}^n$.
b) Demuestre que en el e.v. $\mathbb{R}^2$, la función $\|\vec{x}\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right]^{1/2}$ es una norma.
Haga un dibujo de los conjuntos $B(\vec{0}, 1)$ y $B'(\vec{0}, 1)$.

10. Demuestre que en el e.v. $(C_{[a,b]}, \mathbb{R})$ De las funciones continuas de [a,b] en $\mathbb{R}$, la función $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ es una norma. Demuestre que el e.v. $I([a,b], \mathbb{R})$ De las funciones integrables de [a,b] en $\mathbb{R}$, la función $\|\cdot\|_1$ no es una norma.

Usar cuadernillo oficio matemáticas cuadro grande y hojas corcheteadas