Auxiliar 7: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Enero de 2009

P1. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \tfrac{z^2}{h^2} \quad h > 0 \tag{1}$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \tfrac{dz}{d\theta} &= z \\ z(0) &= h \end{aligned} \tag{2}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

a) Encuentre una parametrización para Γ y bosqueje la curva .

b) Encuentre la longitud de arco s y una expresión para la parametrización en longitud de arco de Γ.

c) Calcule la rapidez , el vector velocidad, tangente, normal y binormal .

d) Calcule la curvatura (κ) y la torsión (τ).

e) Verifique que

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

P2. Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente: el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(A, 0)$ y $(-A, 0)$ es constante e igual a $B > 0$.(Lemniscata).

P3. Considere la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$. Calcule su triedro de Frenet, $\kappa(t)$ y $\tau(t)$. Estudie el comportamiento de κ y τ cuando $t \to \pm\infty$.

P4. Sea la hélice descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) =& a\cos(t) \\ y(t) =& a\sin(t) \\ z(t) =& at\tan(\alpha) \end{aligned}$$

donde α, a constantes y $a > 0$. Se pide:

(i) Hallar los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ en función del parámetro t.

(ii) Probar que $\hat{T}$ y $\hat{B}$ forman un ángulo constante con el eje $\hat{z}$ y que $\hat{N}$ es perpendicular a éste eje y dirigido hacia el.

(iii) Probar que la curvatura κ y la torsión τ quedan expresadas por:

$$\begin{aligned} \kappa =& \frac{\cos^2\alpha}{a} \\ \tau =& \frac{-\sin\alpha\cos\alpha}{a} \end{aligned}$$

P5. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2+y^2 = z^2$, de forma tal que su altura z y el ángulo en cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, +\infty)$.

(a) Encuentre una parametrización de Γ. Dibuje la curva.

(b) Calcule el largo de Γ.

(c) Hallar los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ en función del parámetro θ.

P6. Considere la curva Γ que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización para Γ.

b) Suponga que Γ es un alambre con densidad de masa $\rho\,(x, y, z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2-x^2-y^2}}$. Calcule la masa del alambre.

P7. Sea Γ la curva definida por la intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. Calcular la integral de linea $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j} + (z^2 + y)\vec{k}$$