Tareas 5: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Enero de 2009

P1. Encuentre una parametrización para cada una de las siguientes curvas:

a) Elipse: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

c) Curva de Lamé: $x^4 + y^4 = 1$.

d) Cúbica nodal: $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$.(Indicación: Use el parámetro $t = \frac{y}{x}$)

e) Ocho de Lissajous: $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$. (Indicación: Use el parámetro $t = \arcsin(x)$)

f) El cuadrado $|x| + |y| = 1$.

g) El triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

h) La lenteja formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$;$x, y \geq 0$, recorrida en sentido anti-horario.

i) una partícula que se mueve sobre el manto del paraboloide invertido de ecuación $x^2 + y^2 = -z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = -e^{-2\theta}$, $\theta \geq 0$.

P2. Parametrizar las siguientes curvas:

a) Una recta gira en torno al punto O con una velocidad angular w barriendo un plano. El punto P se mueve por la recta con una velocidad proporcional a la distancia $|\overrightarrow{OP}|$. Encontrar la ecuación de la linea descrita por el punto P (*espiral logarítmica*).

b) Una recta, no perpendicular al eje $\hat{z}$, gira uniformemente en torno al origen O con velocidad angular w. El punto P se mueve por la recta con velocidad constante.(*hélice cónica*).

c) Una recta, no perpendicular al eje $\hat{z}$, gira uniformemente en torno al origen O con velocidad angular w. El punto P se mueve por la recta con velocidad proporcional a la distancia $|\overrightarrow{OP}|$. (*espiral cónica).*

P3. Hallar la longitud de arco de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes definida en polares por la ecuación $r = a\theta$.

P4. Dibuje y calcule la longitud de arco y la curvatura de las curvas descritas por las siguientes parametrizaciones:

a) Catenaria: $\vec{r}(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Espiral logarítmica: $\vec{r}(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, donde $a, b \neq 0$.

c) Parábola semicúbica, o cuspidal: $\vec{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

P5. Considere las siguientes curvas:

a) $\alpha(t) = (\sinh t, \cosh t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $\beta(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Para las tres calcule la longitud de arco, la curvatura y la torsión.

(ii) Para α y γ encuentre la parametrización en longitud de arco.

(iii) Para β calcule el triedro de Frenet.

P6. Considere la curva $\gamma(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t), 0)$, $t \in \mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $b < 0$. Pruebe que cuando $t \to \infty$ tiende a $(0,0)$ describiendo una espiral. Y también que $\gamma'(t) \to (0,0)$ cuando $t \to \infty$. Verifique que la curva tiene longitud finita, es decir:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \|\gamma'(\tau)\| d\tau < +\infty$$

P7. Una partícula se mueve en el plano a lo largo de la espiral $r = e^{\theta}$ con una rapidez de v $[m/s]$.

(i) Hallar la velocidad y la aceleración en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(ii) ¿Cuánto tarda la partícula en ir desde el punto correspondiente a $\theta = 0$ hasta el punto correspondiente a $\theta = \pi$?.

(iii) si $\theta = 0$ cuando $t = 0$, hallar las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la partícula.

P8. Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña. Utilizando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de Γ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$ con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.

P9. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}\cos(t)$, $y(t) = e^{2t}\sin(t)$.

a) Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.

b) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0 sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte anterior.

P10. Probar que las curvas descritas por las ecuaciones en coordenadas polares siguientes se intersectan formando un ángulo recto:

$$r = a(1 + \cos\theta)$$
$$r = a(1 - \cos\theta)$$

P11. Hallar los puntos sobre la curva Γ descrita por las ecuaciones paramétricas $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = \cos t$ en los cuales la curvatura κ presenta un valor mínimo.

P12. Hallar el valor de la integral de linea $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ del campo vectorial $\vec{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que une el origen de coordenadas con el punto $(1,1,1)$ y que esta definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $y = x^2$, $z = x^3$.

P13. Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la esfera unitaria.

a) Dibuje la curva Γ.

b) Encuentra una parametrización para la curva Γ.

c) Verifique la regularidad. Encuentre la Velocidad y el Vector Tangente de la parametrización.

P14. (*Cardioide*)
Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1 - \cos(\theta)) \;\; a > 0, \; \theta \in [0, 2\pi]$$

a) Encuentre una parametrización para Γ. Grafique esta parametrización y encuentre sus posibles irregularidades.

b) Calcule el largo de Γ