Clase auxiliar 2: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
18 de diciembre de 2008

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$. Demuestre que existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $l = f(\overline{x})$

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq |x|$. La idea del problema es demostrar que f tiene un mínimo global.
O sea:

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f(a) \leq f(x)$$

Para esto, proceda como sigue:

(a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I,\ f(x) > f(0)$

(b) Concluya que f tiene un mínimo global (en todo $\mathbb{R}$).

P3. Sea $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demostrar que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

P4. Sean $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ funciones contínuas y epiyectivas. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que: $f(c) = g(c)$

P5. Demostrar que la ecuación $\tan x = x$ tiene una infinidad de raíces reales.

P6. Sea P un polinomio. Demostrar que existe algún número x_0 tal que $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ para todo x.