Ejercicios: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Diciembre de 2008

P1. Sea $f\colon \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0, \quad \forall x \leq 0 \\ f(x) &\geq 1, \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

Pruebe que f no es continua en 0.

P2. Considere la función definida en $(0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.

P3. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que existe una constante $L > 0$ tal que para todo $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

probar que f es continua en A.

P4. Sea $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que satisface:

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si h es contínua en $x = 1$, entonces h es contínua en todo su dominio.

P5. Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log(x)}{x - 1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

Encuentre α para que f sea contínua.

P6.

a) Demostrar que si f es continua en a, entonces $|f|$ también lo es.

b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = P + I$, donde P es par y continua y I es impar y continua.

c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.

d) Demostrar que todo función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

P7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Probar que f no es continua en ningún punto.

b) Considere la función $g(x) = f(x)x$ Probar que f es continua sólo en 0.

c) Considere la función $g(x) = f(x) \sin x$. Determine donde g es continua.

P8. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.